Федеральное агентство по образованию
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Компьютерный практикум
«Математические модели экономического роста».
(специальный семинар № 1,3)

Составил:
доцент кафедры "Математическая экономика ",
к.э.н. Варюхин А.М.

Саратов 2014

Варюхин А. М. Компьютерный практикум «Математические модели экономического роста». - Саратов: СГУ, 2014 .- 60 с.

В пособии приведены краткие теоретические данные по классическим моделям экономического роста и методические указания к выполнению лабораторных работ по исследованию данных моделей в среде Excel и MatLab Simulink. Даны примеры скриптов и симулинк моделей, реализующих учебные задачи в среде MatLab. Пособие предназначено для студентов специальности 080801 – прикладная информатика (в экономике), реализуемой на механико-математическом факультете, оно может быть использовано студентами и аспирантами других специальностей, обучающихся в СГУ, а также применяться при преподавании в других вузах.

ПОСОБИЕ ОПУБЛИКОВАНО ПО АДРЕСУ: http://aleksvaruh.ucoz.ru/index/uchebniki_i_posobija/0-33

e-mail автора: sov-gfisar@yandex.ru

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА1

«ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ Р. ХАРРОДА - Е. ДОМАРА»

1. Краткие теоретические сведения

1.1 Дискретная модель «Р.Харрода-Е.Домара»

Исходные постулаты

Модель построена на следующих постулатах:

1. Рассматривается односекторная закрытая экономика без государства;
2. Эндогенные факторы инвестиции I и прирост капитала ΔK;
3. Экзогенные факторы s =const –норма сбережения и σ=const средняя производительность капитала (НТП отсутствует);
4. Сбережения считаются равными инвестициям, а инвестиции равны приросту капитала в следующий период времени ($I=\Delta K$);
5. Модель функционирует в соответствии со следующей экономической логикой:

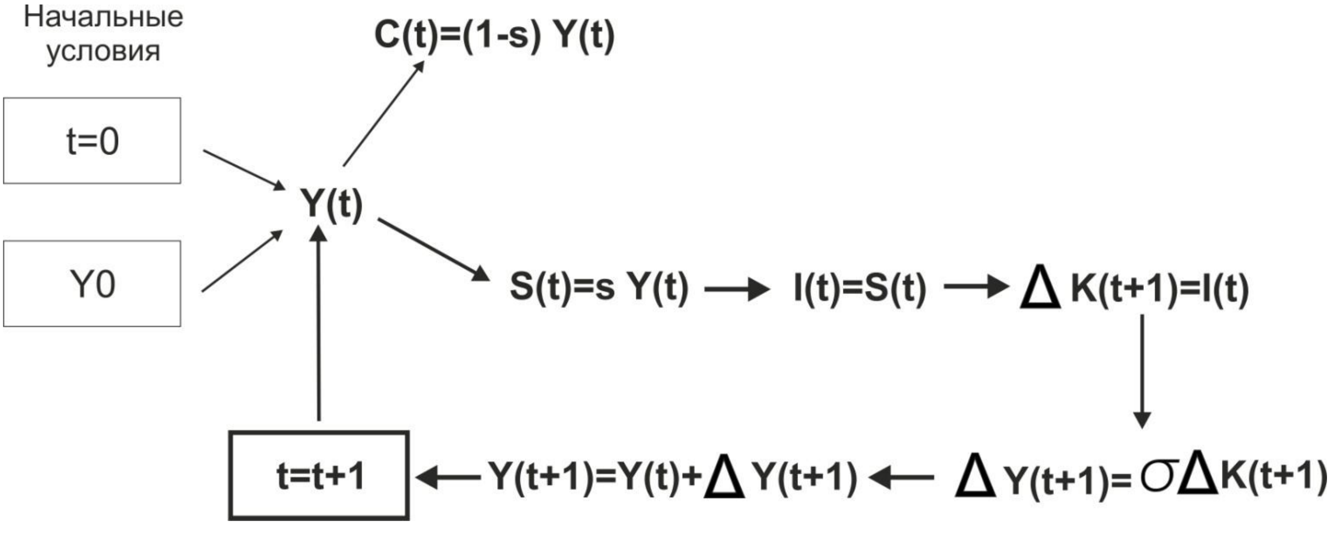


Рис. 1

Здесь Y(t) –объем выпуска в год t; S(t) – сбережения в год t; I(t) – инвестиции в год t; ΔK(t+1) прирост капитала в год t+1; ΔY(t+1)- прирост выпуска в год t+1; Y(t+1)- объем выпуска в год t+1, C(t)- потребление в год t.

Базовые соотношения и свойства

Производство (предложение)

1.S(t)=sY(t) 2. I(t)=S(t) 3. ΔK(t+1)=I(t)4. ΔY(t+1)= σΔK(t+1)

Из 1-4 имеем

$$\Delta Y(t+1) = \sigma\, s\, Y(t) \rightarrow \frac{\Delta Y(t+1)}{Y(t)} = \sigma s \quad (5)$$

Здесь $\sigma = \frac{\Delta \mathrm{Y(t+1)}}{\Delta \mathrm{K(t+1)}}$- мультипликатор, $a = \frac{1}{\sigma} = \frac{\Delta \mathrm{K(t+1)}}{\Delta \mathrm{Y(t+1)}}$ - акселератор.Таким образом, темп прироста объема предложения в модели Харрода постоянен и равен произведению нормы сбережения на среднюю производительность капитала (мультипликатор) или частному нормы сбережения и акселератора.

Оценим, каким должны быть темпы прироста потребления и инвестиций в модели, чтобы рост предложения был равновесным и устойчивым.
Модель дополняется соотношением Кейнса:

$$Y(t) = S(t)+C(t),\ \text{где}\ C(t)\text{- (потребление)} \quad (6)$$

Покажем, чему должен быть равен темп прироста спроса при выполнении условий 1-4,6.
Из уравнения 6 получаем:

$$S(t) = Y(t) - C(t) \quad (7)$$

Используя уравнения 1-4 и 7, получаем:

$$\Delta Y(t+1) = \sigma\big(Y(t) - C(t)\big) = s\sigma Y(t) \quad (8)$$

Из 8 получаем:

$$C(t) = Y(t)(1-s) \quad (9)$$

Аналогично получаем: $\mathrm{C(t+1)} = Y(t+1)(1-s)$(10)

Вычитаем из (10) (9) получаем: $\Delta C(t+1) = \Delta Y(t+1)\ (1-s)$(11)
Поделим обе части уравнения (11) на$C(t)$ получим:

$$\frac{\Delta C(t+1)}{C(t)} = \frac{(1-s)\Delta Y(t+1)}{C(t)} = \frac{(1-s)\Delta Y(t+1)}{Y(t)\ (1-s)} = \frac{\Delta Y(t+1)}{Y(t)} = s\sigma \quad (12)$$

Из (12) и (9) имеем:

$$\frac{C(t+1)\ \ -C(t)}{C(t)} = \frac{(Y(t+1)\ \ -I(t+1)\ \ )-(Y(t)\ \ -I(t)\ \ )}{Y(t)\ \ -I(t)} = \frac{\Delta Y-\Delta I}{Y(t)\ \ -I(t)} = \sigma s \quad (13)$$

После преобразований получаем: $\Delta I = \sigma s I(t) \quad \rightarrow \frac{\Delta I}{I(t)} = \sigma s$ (14)

Следовательно :

$$\frac{\Delta Y(t+1)}{Y(t)} = \frac{\Delta C(t+1)}{C(t)} = \frac{\Delta I(t+1)}{I(t)} = \sigma s \ (15)$$

Таким образом, устойчивый равновесный рост экономики при полном использовании капитала в модели Харрода обеспечивается тогда, когда темпы прироста предложения, потребления и инвестиций совпадают и равны $s\sigma$.

При этом экономика растет по экспоненте с показателем степени σst. Роль государства состоит в создании условий для обеспечения равновесия между спросом и предложением, равенства инвестиций и сбережений и обеспечения полного использования инвестиций для наращивания капитала.

1.2 Непрерывная модель «Р.Харрода-Е.Домара»

Рассмотрим, как выглядит модель в непрерывном времени. Из уравнения (5) имеем:

$$\Delta Y(t+1) \quad = Y(t)\sigma s (16)$$

Переходя к бесконечно малым приращениям, получаем основное дифференциальное уравнение модели Харрода-Домара в непрерывном времени:

$$\frac{dY}{dt} = \sigma s Y \ (17)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$Y(t) = Y(0)e^{\sigma st} = Y(0)e^{\frac{s}{a}t} (18)$$

Исследуем непрерывную модель с точки зрения влияния характера изменения потребления на экономический рост.

а. Потребление отсутствует, весь доход тратиться на накопление

Эта гипотеза нереалистична, но позволяет дать оценку максимально возможного для данной экономики темпа роста доходов. Здесь имеем s=1, тогда из (18) получаем:

$$Y(t) = Y(0)e^{\sigma t} = Y(0)e^{\frac{1}{a}t} \quad (19)$$

Из (19) вытекает, что максимально возможный темп прироста дохода равен мультипликатору.

б. Уровень потребления постоянен во времени

$$C(t) = C0 = const \quad (20)$$

Тогда имеем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dY}{dt} = \sigma I(t) = \sigma Y(t) - \sigma C0 \quad (21)$$

Из решения уравнения (21) следует, что:

$$Y(t) = C0 + (Y(0) - C0)e^{\sigma t} \quad (22)$$

Уравнение (22) описывает траекторию роста дохода при условии, что уровень потребления не изменяется во времени. Тогда норма сбережения равна:

$$s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} = 1 - \frac{C0}{C0 + (Y(0) - C0)e^{\sigma t}} \quad (23)$$

При$t \to \infty Y(t) \to \infty$и $\mathrm{s}(t) \to 1$ (24)

Темп прироста дохода$\boldsymbol{\rho}$*(t)*, в этом случае равен:

$$\rho(t) = \frac{Y(t)'}{Y(t)} = \frac{\sigma(Y(0) - C0)}{\frac{C0}{e^{\sigma t}} + (Y(0) - C0)} \quad (25)$$

Из (25) следует, что при $t \to \infty \rho(t) \to \sigma$ (26). То есть в предельном случае доля потребления стремиться к нулю и темп прироста дохода стремиться к значению мультипликатора.

в. Потребление растет с постоянным темпом $\boldsymbol{\gamma}$

То есть, имеем $C(t) = C0e^{\gamma t}$и тогда возможны следующие случаи.

<u>Случай 1</u> $\boldsymbol{\gamma} = \sigma$ -потребление растет с темпом равным значению мультипликатора.

Тогда имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dY}{dt} = \sigma I(t) = \sigma Y(t) - \sigma C0e^{\sigma t} \quad (27)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$Y(t) = [Y(0) - \sigma C0t]e^{\sigma t} \quad (28)$$

Доход растет до тех пор, пока уровень инвестиций остается положительной величиной. То есть , чтобы определить интервал времени, в течении которого доход растет, необходимо решить уравнение:

$$I(t) = \frac{1}{\sigma}\frac{dY}{dt} = 0 \text{или} \quad \frac{dY}{dt} = 0 \quad (29)$$

Подставляя в левую часть (29) (27) и используя (28), получаем, что

$$\frac{dY}{dt} = 0 \text{ при } t_1 = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{Y(0)}{C0} - 1\right) \quad (30)$$

Из (28) получаем $Y(t) = 0$ при $t_2 = \frac{1}{\sigma}\frac{Y(0)}{C0}$ (31)

Таким образом, при росте потребления с темпом равным значению мультипликатора доход растет в интервале времени от 0 до t_1, достигая максимального значения $Y_{max} = C0e^{\sigma t_1}$, а затем начинает падать и становиться равным 0 при t_2

<u>Случай 2</u> $\gamma > \sigma$ -потребление растет с постоянным темпом, превышающим значение мультипликатора.

Тогда имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dY}{dt} = \sigma I(t) = \sigma Y(t) - \sigma C0e^{\gamma t} \quad (32)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$Y(t) = \left[Y(0) - \frac{C0}{1-\frac{\gamma}{\sigma}}\right]e^{\sigma t} + \frac{C0}{1-\frac{\gamma}{\sigma}}e^{\gamma t} \quad (33)$$

Из (32) и (33) вытекает, что темп прироста дохода в первоначальный момент времени равен:

$\frac{Y'(0)}{Y(0)} = \sigma s_0 > 0$ (34), где $s_0 = \frac{Y(0)-C0}{Y(0)}$ - норма сбережения в начальный момент времени. Таким образом, исходный темп прироста дохода положителен, но в (33) второе слагаемое отрицательно и поэтому с определенного момента времени доход начнет падать аналогично случаю 1.

<u>Случай 3</u> $\gamma < \sigma$ и $\gamma < s_0\sigma$ - темп прироста потребления меньше значения мультипликатора и меньше первоначального темпа прироста дохода.

Рассмотрим (33) второе слагаемое в силу условия $\gamma < \sigma$ положительно, потребуем чтобы и первое слагаемое тоже было положительно, То есть имеем:

$Y(0) - \frac{C0}{1-\frac{\gamma}{\sigma}} > 0$, тогда имеем $Y(0) > \frac{C0}{1-\frac{\gamma}{\sigma}}$ отсюда $1 - \frac{\gamma}{\sigma} > \frac{C0}{Y(0)} \rightarrow \gamma < \frac{Y(0)-C0}{Y(0)}\sigma = s_0\sigma$. Следовательно, в этом случае доход постоянно растет во времени.

При $t \rightarrow \infty$ и $s(t) \rightarrow 1$, то есть в пределе потребление стремиться к нулю

<u>Случай4</u> $\gamma < \sigma$ и $\gamma = s_0\sigma$ - темп прироста потребления меньше значения мультипликатора и равен первоначальному темпу прироста дохода. Имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dY}{dt} = \sigma Y(t) - \sigma C0e^{\sigma s_0 t} \quad (35)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$Y(t) = \frac{C0}{1-s_0}e^{\sigma s_0 t} \rightarrow Y(0) = \frac{C0}{1-s_0} \rightarrow Y(t) = Y(0)e^{\sigma s_0 t} \rightarrow$

$$s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} = \frac{Y(t)-C0e^{\sigma s_0 t}}{Y(t)} = \frac{Y(0)-C0}{Y(0)} = s_0 \quad (36)$$

Таким образом, норма сбережения в этом случае будет постоянной, темп прироста дохода будет равен произведению этой нормы на технологический мультипликатор.

Случай5 $s_0\sigma < \gamma < \sigma$ - темп прироста потребления меньше значения мультипликатора,но больше первоначального темпа прироста дохода.Доход ведет в этом случае аналогично случаям 1 и 2.

Выводы

Таким образом, согласно модели Харрода-Домара наиболее разумным вариантом экономического развития является такое развитие, при котором потребление и накопление растут с постоянным темпом, причем темп прироста дохода также постоянен и равен σs_0 (случай 4).

Из модели Харрода следует, что постоянного сбалансированного роста можно достичь двумя путями.

1. В начальный момент выбирается норма сбережения s_0 и тогда ищется оптимальный темп роста потребления $\gamma = \sigma s_0$

2. Выбирается желаемый темп роста потребления γ и тогда ищется норма накопления $s_0 = \frac{\gamma}{\sigma}$, обеспечивающая этот темп.

При сбалансированном равновесном ростетемпы прироста предложения (дохода), потребления и инвестиций совпадают и равны $s\sigma$.

Попытки прогнозировать экономический рост на основе модели Харрода-Домара оказались неудачными. Исследователи пришли к выводу, что модель не объясняет основных детерминант роста.

ЗАДАНИЕ ПОЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1 «ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ХАРРОДА-ДОМАРА»

Исследование дискретной модели

а. Осуществите расчет объема выпуска, используя соотношения дискретной модели «Харрода-Домара» и параметры вашего варианта из таблицы:

Номер варианта	s-норма сбережения	σ-средняя производительность капитала	Начальное значение выпуска $Y(0)$	Расчетный интервал T
1	0,6	1,8	20	10
2	0,4	1,9	50	10
3	0,65	1,5	100	10
4	0,7	1,2	80	12
5	0,55	1,9	40	11
6	0,75	1,6	55	10
7	0,8	1,1	150	12
8	0,58	1,43	100	11
9	0,72	1,57	80	10
10	0,48	1,9	120	12

б. Постройте графики Y(t), C(t), I(t)$t \in [0, T]$

в. Покажите, что для любых значений t, t+1выполняется условие (15)

г. Постройте семейство графиков Y(T), как функцию от s- нормы сбережения в интервале[0,1;1,0] при σ={1,2;1,6, 1,8; 2,0}

д. Самостоятельно разработайте программу исследования дискретной модели Харрода в среде MATLAB. Проведите необходимые расчеты и графический анализ.

Исследование непрерывной модели

а. Самостоятельно разработайте S-модель и программу исследования модели Харрода (17) в среде MATLAB. Проведите необходимые расчеты и графический анализ. Исходные значения параметров даны в таблице:

s-норма сбережения	σ-мультипликатор	Начальное значение дохода $Y(0)$	Расчетный интервал T
0,4-0,8	1,1-1,5	20-100	10

б. Самостоятельно разработайте S-модель и программу исследования модели Харрода (21) в среде MATLAB. Проведите необходимые расчеты и графический анализ (графически покажите, что выполняются условия (24) и (26)). Исходные значения параметров даны в таблице:

C0 –уровень потребления	σ-мультипликатор	Начальное значение дохода $\mathrm{Y}(0)$	Расчетный интервал T
15-85	1,1-1,5	20-100	2-10

в. Самостоятельно разработайте S-модель и программу исследования модели Харрода (27) в среде MATLAB при постоянном темпе роста потребления (случай 1). Проведите необходимые расчеты и графический анализ (графически найдите значения t_1, t_2). Исходные значения параметров даны в таблице:

C0 начальный уровень потребления	γ=σ	Начальное значение дохода $\mathrm{Y}(0)$
1	1,5	20
2	1,4	20
3	1,2	20

г. Используя разработанную программу и модель (см пункт в), исследуйте модель Харрода при постоянном темпе роста потребления (случаи 2,3,4,5)

д. Самостоятельно разработайте S-модель и программу исследования модели Харрода и, используя их, найдите максимально возможный темп прироста дохода для экономики, в которой σ=0,25 и определите,через, сколько времени в этой экономике доход увеличиться вдвое.

Дополнительное задание ж.

Самостоятельно разработайте S-модель и программу исследования модели Харрода для экономики, в которой отсутствует потребление, и акселератор a зависит от времени следующим образом: $a(t) = a(0)e^{kt}$, где $a(0) -$ значение акселератора в начальный момент времени,$k > 0$. Используя их, определите предел роста дохода и постройте его траекторию во времени

Оформите все полученные результаты в виде отчета в формате Word.

Отчет должен содержать:

1. Постановку задачи и исходные данные.
2. Тексты программ с подробными комментариями и схемы S-моделей.
3. Результаты моделирования (полученные значения необходимых параметров, графики и.т.д)
4. Выводы из полученных результатов

   К отчету прилагаются все созданные Excel, .m и .mdl файлы

ПРИМЕРЫ ПРОГРАММ И S-МОДЕЛЕЙ ДЛЯИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ «ХАРРОДА-ДОМАРА» В СРЕДЕ MATLAB

Пример программы расчетов по дискретной модели «Харрода-Домара» в среде MATLAB

```
clc
clearall
% ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ХАРРОДА-ДОМАРА
%ЗАДАНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
%горизонт прогноза
T=10
%норма сбережения
s=0.6;
% производительность капитала
a=1.2;
bb=a*s
%%начальное значение
for j=1:1:T
S(j)=0;
Y(j)=0;
 C(j)=0;
 Inv(j)=0;
 DK(j)=0;
 b1(j)=0;
 b2(j)=0;
 b3(j)=0;
end
DK(T+1)=0;
Y(T+1)=0;
t=1;
Y(t)=20.0;
%Расчет эндогенных переменных модели для t
%выпуск
%потребление
C(t)=(1-s)*Y(t);
%инвестиции
Inv(t)=s*Y(t);
%прирост капитала
DK(t+1)=Inv(t);
Y(t+1)= Y(t)+a*DK(t+1);
b1(t)=a*DK(t+1)/Y(t);
b2(t)=((1-s)* Y(t+1)-C(t))/C(t);
b3(t)=(s*Y(t+1)-s*Y(t))/Inv(t);
for  t=2:1:T
 t;
C(t)=(1-s)*Y(t);
Inv(t)=s*Y(t);
DK(t+1)=Inv(t);
Y(t+1)=Y(t)+ a*DK(t+1);
b1(t)=a*DK(t+1)/Y(t);
b2(t)=((1-s)*Y(t+1)- C(t))/C(t);
b3(t)=(s*Y(t+1)-s*Y(t))/Inv(t);
end
Y(T+1)=[];
DK(T+1)=[];
X=1:1:T;
plot(X,Y,X,C,X,Inv)
grid
title('ГРАФИКИ Y(t) C(t)  I(t)','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('ВЫПУСКПОТРЕБЛЕНИЕИНВЕСТИЦИИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')

% ПАРАМЕТРЫ УСТОЙЧИВОСТИ РОСТА
b1;b2;b3;
```

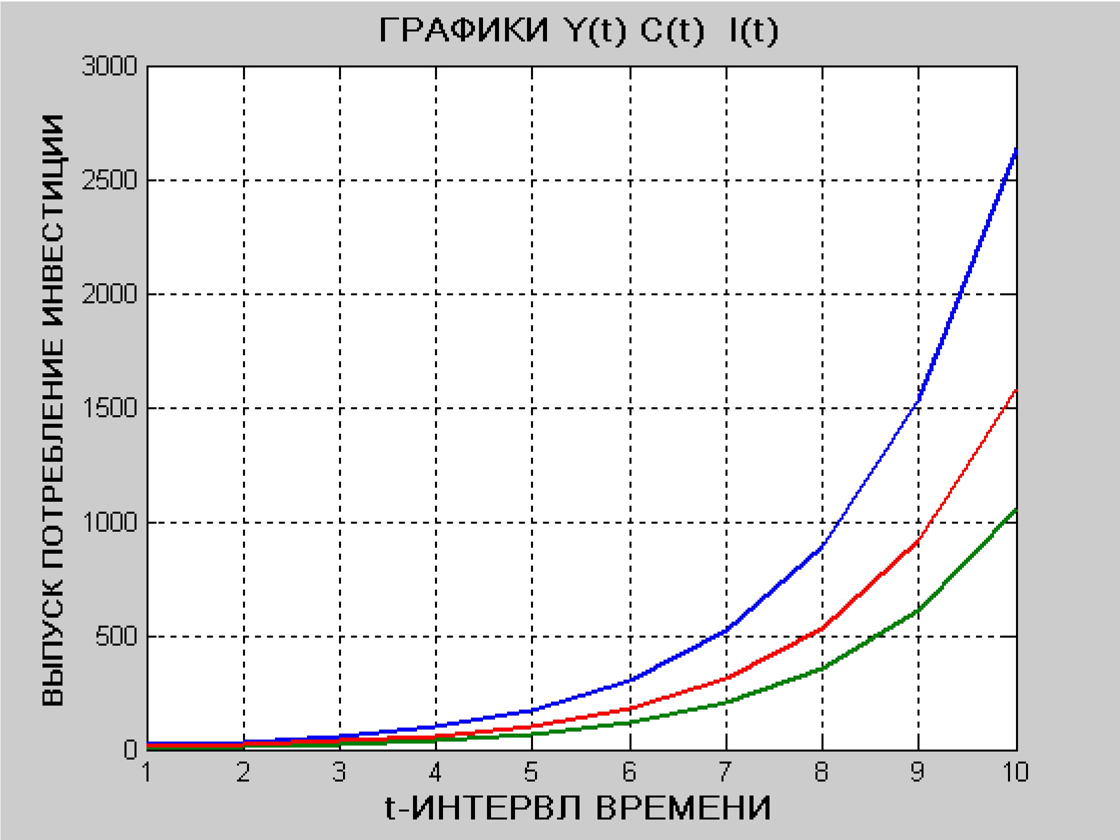


Рис. 1

Пример программы расчетов по непрерывной модели «Харрода-Домара» (17) в среде MATLAB (Интервал моделирования T=10)

```
% НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ ХАРРОДА (17)
clc
clearall
%Программа исследования непрерывной модели  ХАРРОДА
%Открытие модели
open_system('HARROD')
%НОРМА СБЕРЕЖЕНИЯ И МУЛЬТИПЛИКАТОР
ns=0.6;
pr=1.2;
%Начальная ЗНАЧЕНИЕ ДОХОДА У0
Y0=20.0;
%Выполнение модели
sim('HARROD')
%Формирование графиков и надписей
%Черчение графика
Y=ScopeData;
Y(:,1)=[];
L=ScopeData;
L(:,2)=[]
C=ScopeData1;
C(:,1)=[];
I=ScopeData2;
I(:,1)=[];
plot(L,Y,L,C,L,I)
%Формированиенадписей
grid
title('ГРАФИКМОДЕЛЬДОМАРА 17','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('ДОХОДПОТРЕБЛЕНИЕИНВЕСТИЦИИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
```

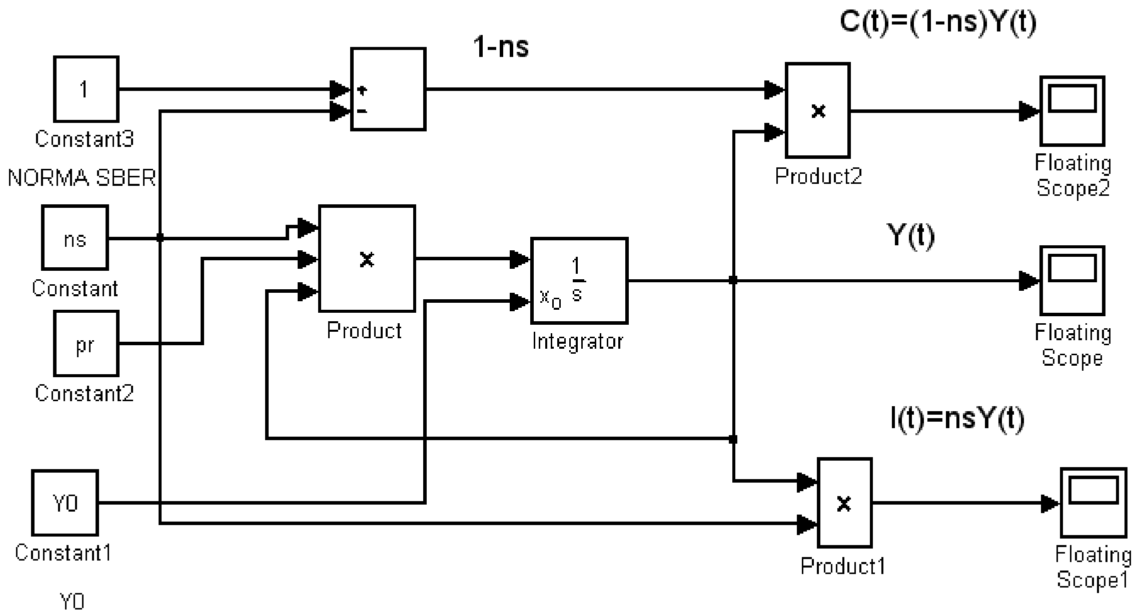


РИС. 1 МОДЕЛЬ ХАРРОДА-ДОМАРА (17)

Рис. 2

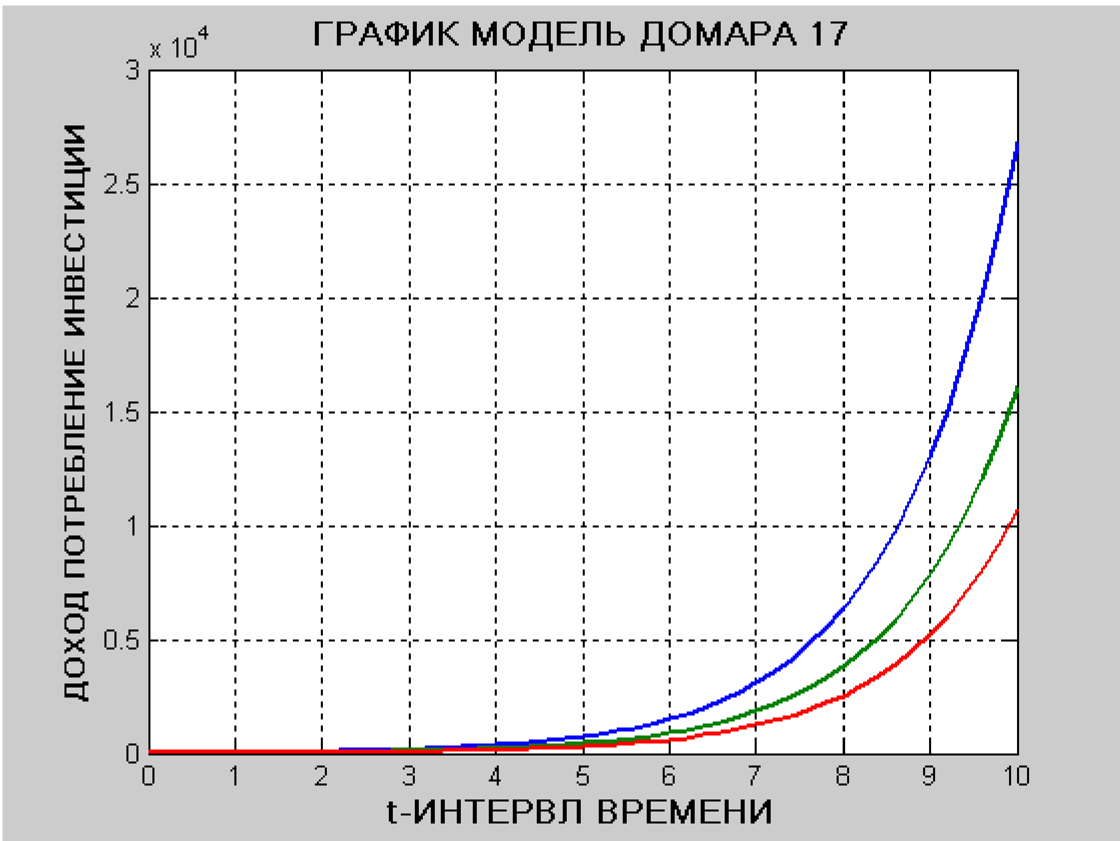


Рис. 3

Пример программы расчетов по непрерывной модели «Харрода-Домара» (21) в среде MATLAB (Интервал моделирования T=3.5и 6, C0=19 Y0=20, σ = 1.5)

```
% НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ ХАРРОДА (21)
clc
clearall
%Программа исследования непрерывной модели  ХАРРОДА
%Открытие модели
open_system('HARROD2')
%МУЛЬТИПЛИКАТОР И УРОВЕНЬ ПОТРЕБЛЕНИЯ
C0=19;
pr=1.5;
%Начальная ЗНАЧЕНИЕ ДОХОДА У0
Y0=20.0;
%Выполнение модели
sim('HARROD2')
%Формирование графиков и надписей
%Черчение графика
Y=ScopeData;
Y(:,1)=[];
L=ScopeData;
L(:,2)=[]
I=ScopeData1;
I(:,1)=[];
s=ScopeData2;
s(:,1)=[];
r=ScopeData3;
r(:,1)=[];

figure(1)
plot(L,Y,L,I)
%Формирование надписей
grid
%Формирование надписей
title('ГРАФИК МОДЕЛЬ ДОМАРА (21)','FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ','FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('ДОХОД ИНВЕСТИЦИИ','FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',10,'FontWeight','bold')

figure(2)
plot(L,s,L,r)
%Формированиенадписей
grid
title('ГРАФИК МОДЕЛЬ ДОМАРА (21)','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('НОРМА СБЕРЕЖЕНИЯ ТЕМП ПРИРОСТА','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
```

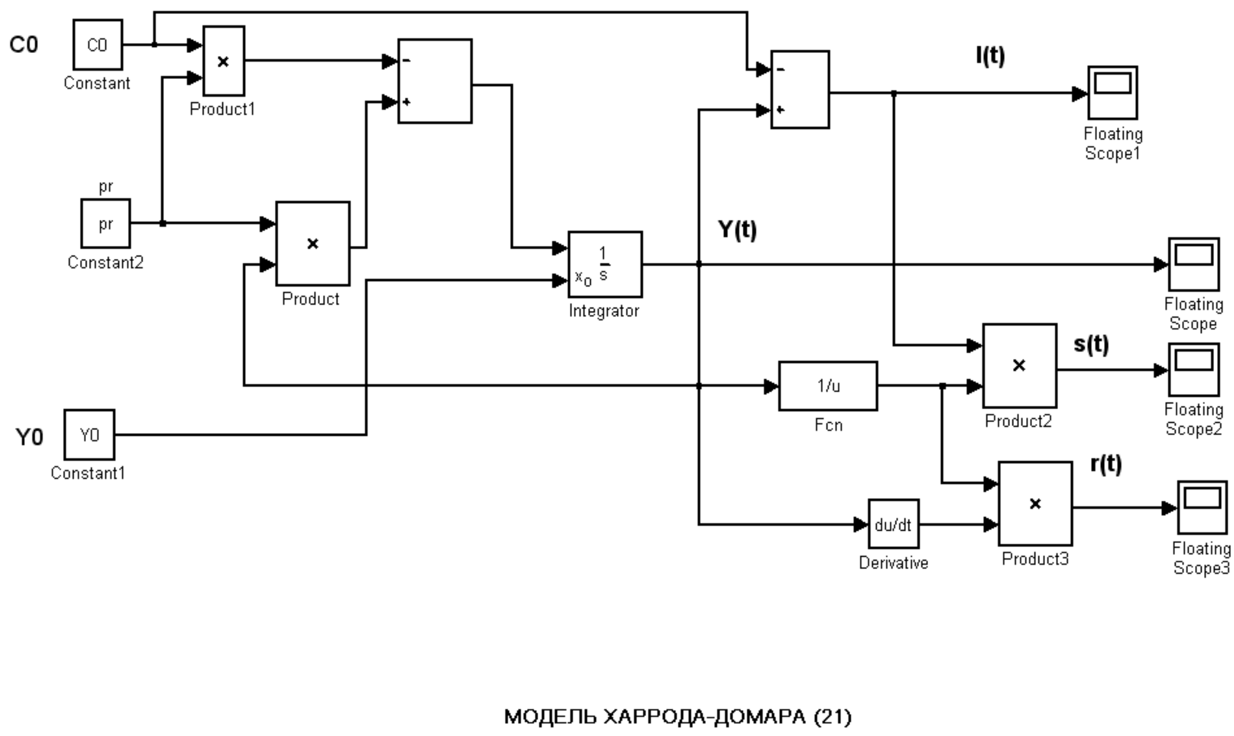

C0
C0
Constant
Product1
pr
pr
Constant2
Product
Y0
Y0
Constant1
1/s
Integrator
Y(t)
I(t)
Floating Scope1
Floating Scope
1/u
Fcn
s(t)
Product2
Floating Scope2
du/dt
Derivative
r(t)
Product3
Floating Scope3
МОДЕЛЬ ХАРРОДА-ДОМАРА (21)

Рис. 4

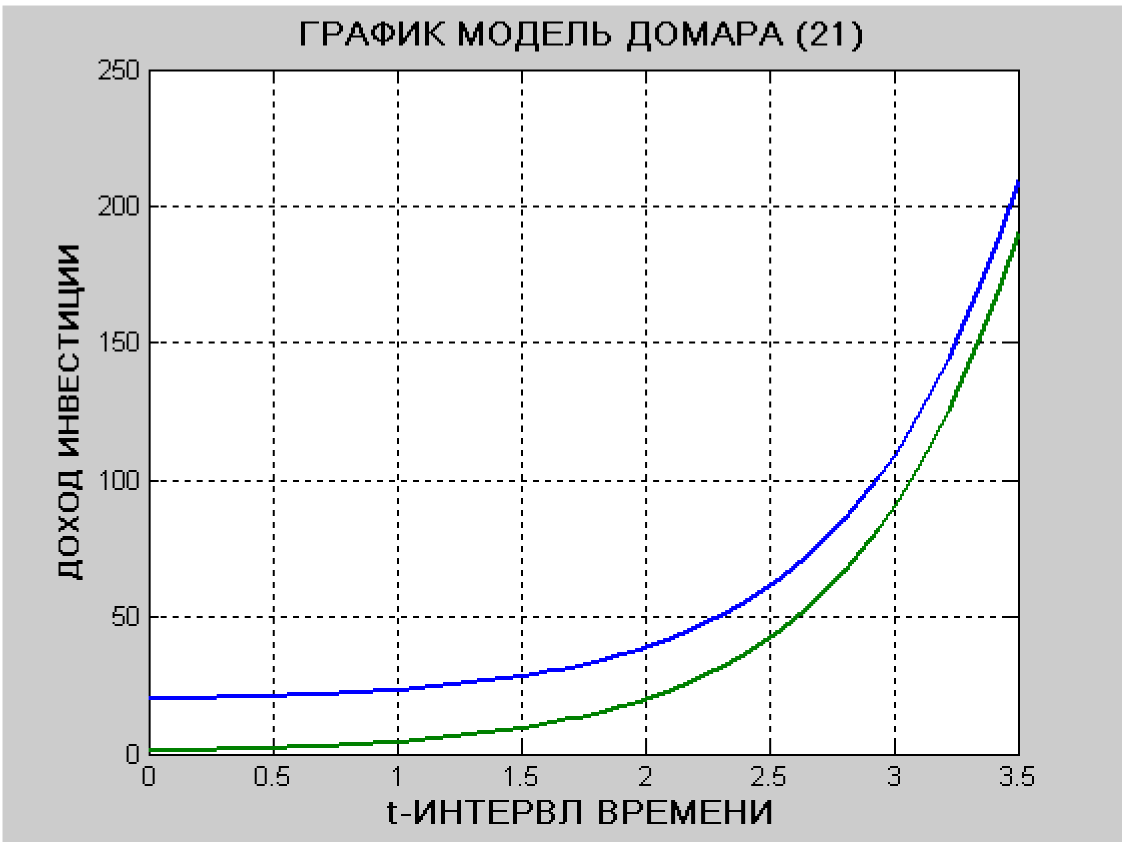


ГРАФИК МОДЕЛЬ ДОМАРА (21)
ДОХОД ИНВЕСТИЦИИ
t-ИНТЕРВЛ ВРЕМЕНИ
0
50
100
150
200
250
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Рис.5

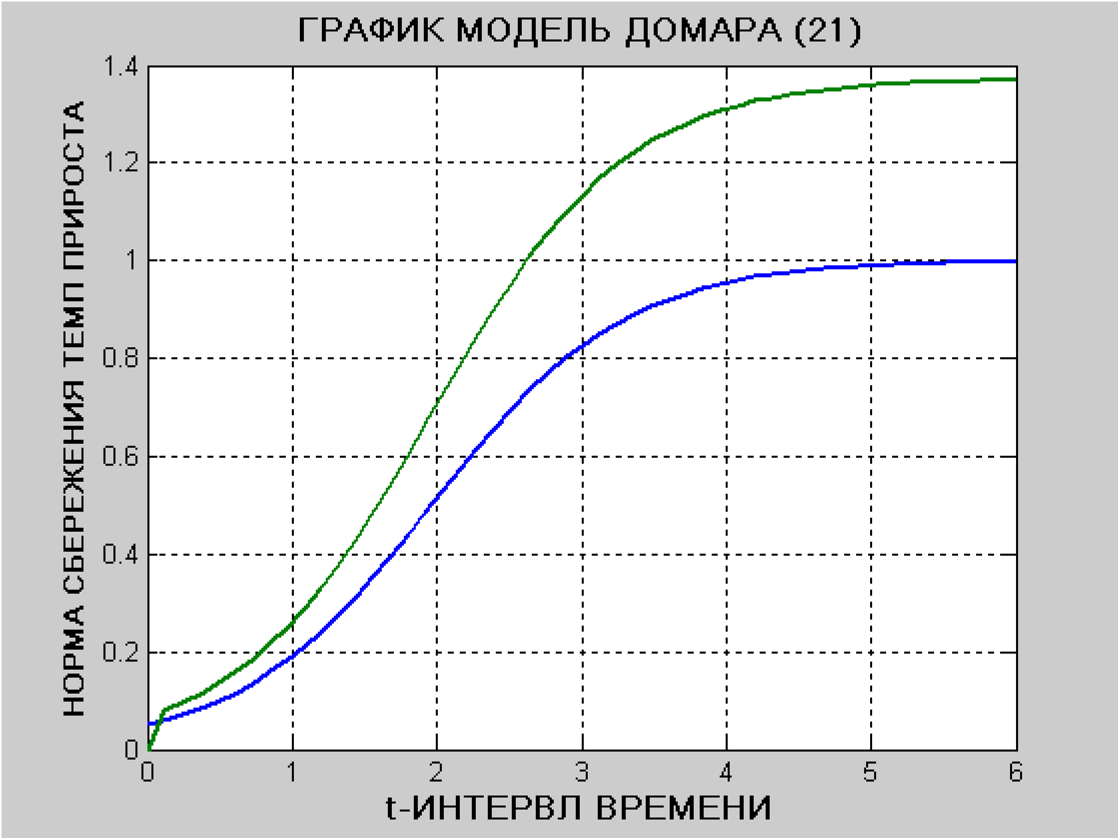


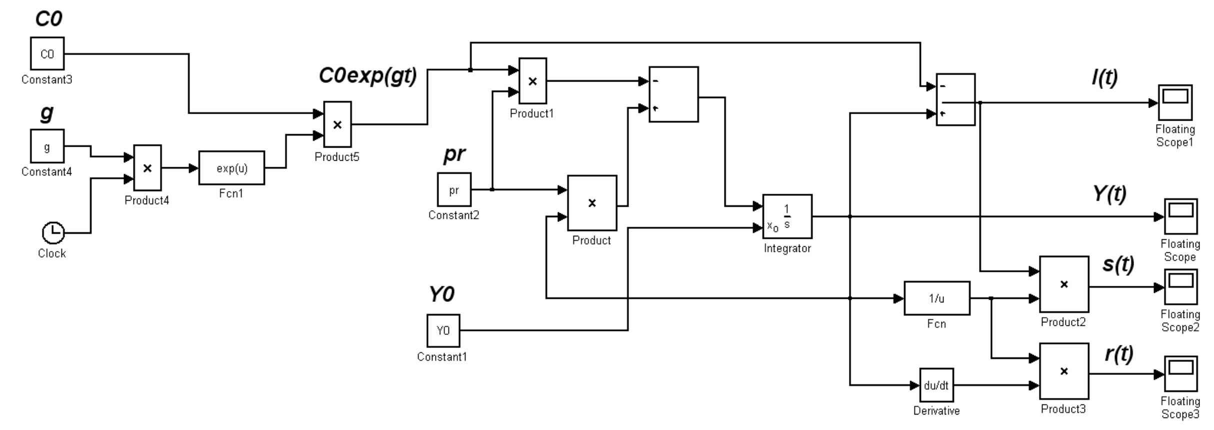
Рис. 6

Пример программы расчетов по непрерывной модели «Харрода-Домара» (27) в среде MATLAB.

```
НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ ХАРРОДА (27)
clc
clearall
%Программа исследования непрерывной модели  ХАРРОДА
%Открытие модели
open_system('HARROD3')
%МУЛЬТИПЛИКАТОР НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ ПОТРЕБЛЕНИЯ ТЕМП РОСТА ПОТРЕБЛЕНИЯ
pr=1.5
C0=1;
g=1.5;
%Начальная ЗНАЧЕНИЕ ДОХОДА У0
Y0=20.0;
%Выполнение модели
sim('HARROD3')
%Формирование графиков и надписей
%Черчение графика
%Черчение графика
Y=ScopeData;
Y(:,1)=[];
L=ScopeData;
L(:,2)=[];
I=ScopeData1;
I(:,1)=[];
s=ScopeData2;
s(:,1)=[];
figure(1)
plot(L,Y,L,I)
%Формированиенадписей
grid
```

```
%Формированиенадписей
title('ГРАФИКМОДЕЛЬДОМАРА (27)','FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ','FontName','ArialUnicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('ДОХОД ИНВЕСТИЦИИ','FontName','ArialUnicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')

figure(2)
plot(L,s)
%Формирование надписей
grid
title('ГРАФИК МОДЕЛЬ ДОМАРА (27)','FontName','ArialUnicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ','FontName','ArialUnicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('НОРМА СБЕРЕЖЕНИЯ' ,'FontName','ArialUnicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
holdon
```



МОДЕЛЬ ХАРРОДА-ДОМАРА (27)

Рис. 7

Случай 1(C0=6Y0=20, γ=σ = 1.5 T=2.3)

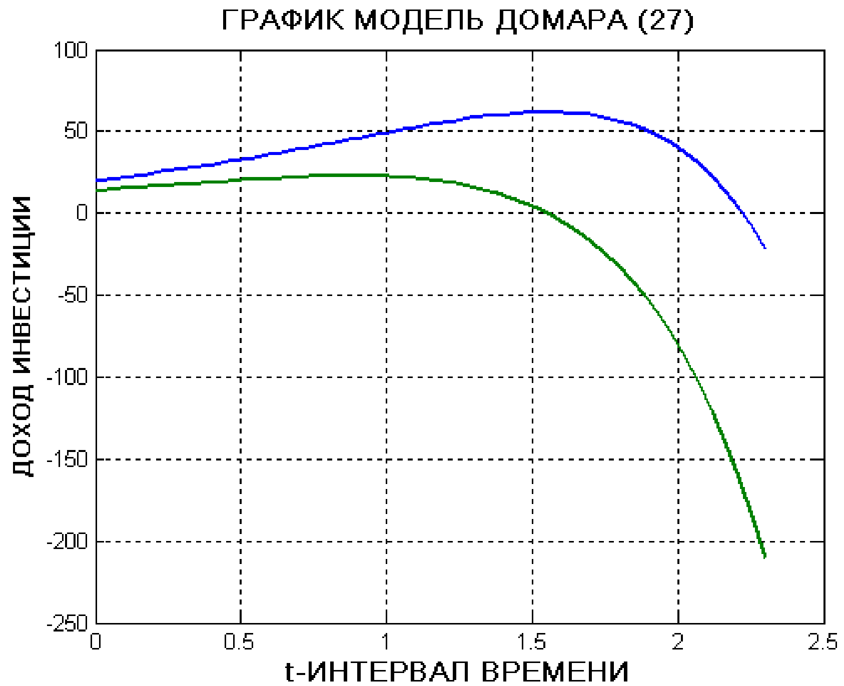


Рис.8

Случай2(C0=6Y0=20, $\sigma = 1.5$ γ =1.6T=2.3)

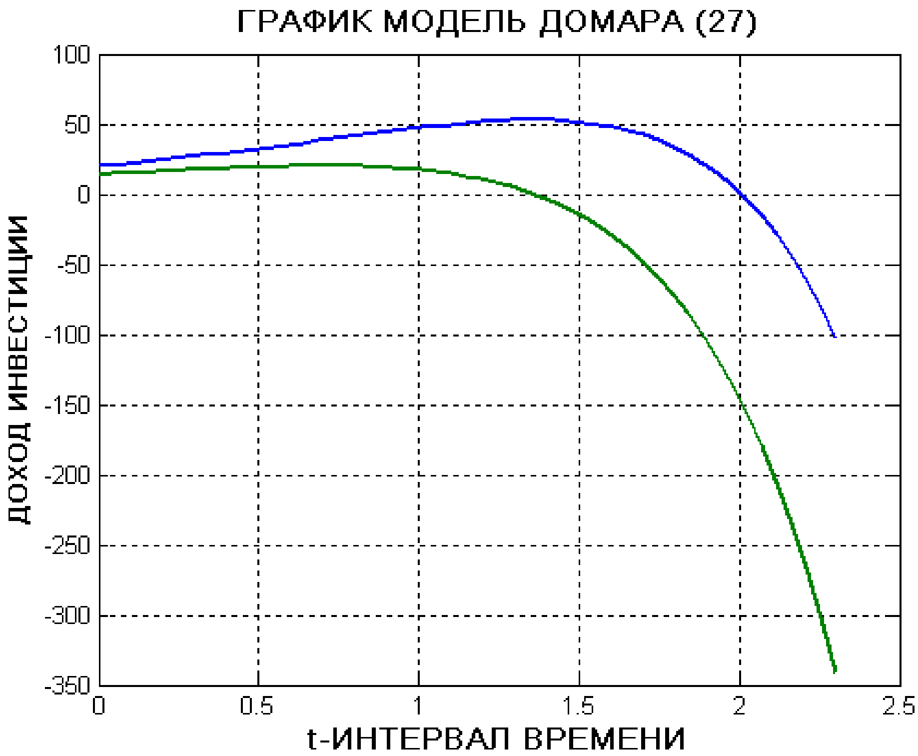


Рис.9

Случай3(C0=10Y0=20σs0= σ (10/20) = 0.75, $\sigma = 1.5$ γ=0.6T=8.0)

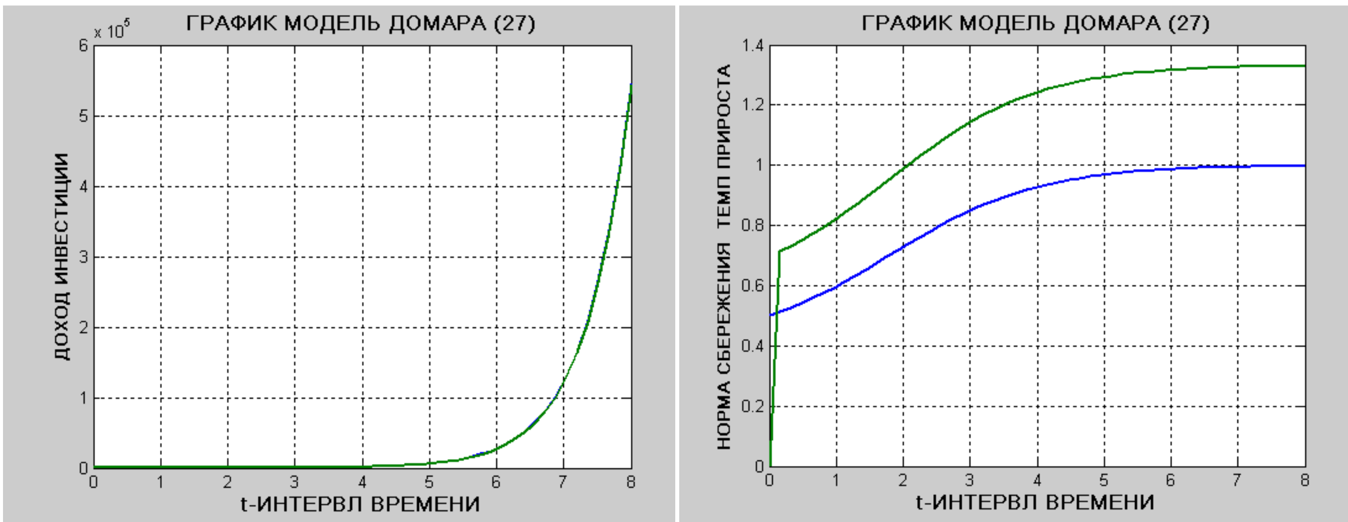


Рис. 10

Случай 4(C0=10Y0=20σs0= σ (10/20) = 0.75, σ = 1.5 **γ**=0.75T=8.0)

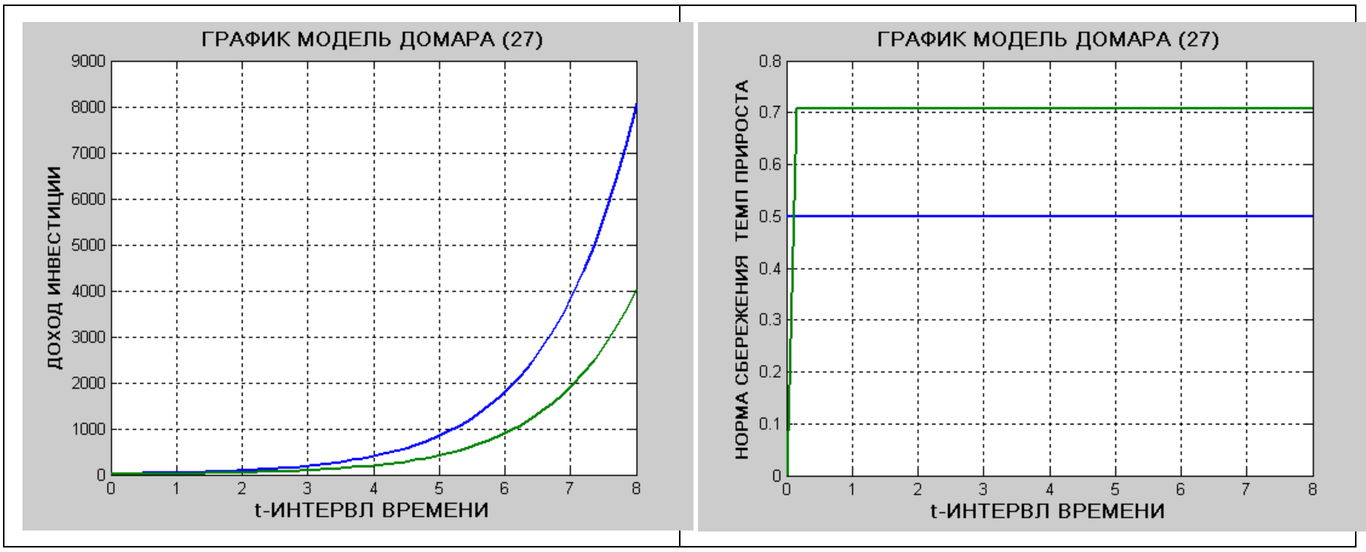


Рис. 11

Случай 5(C0=10Y0=20σs0= σ (10/20) = 0.75, σ = 1.5 **γ**=0.8T=3.87)

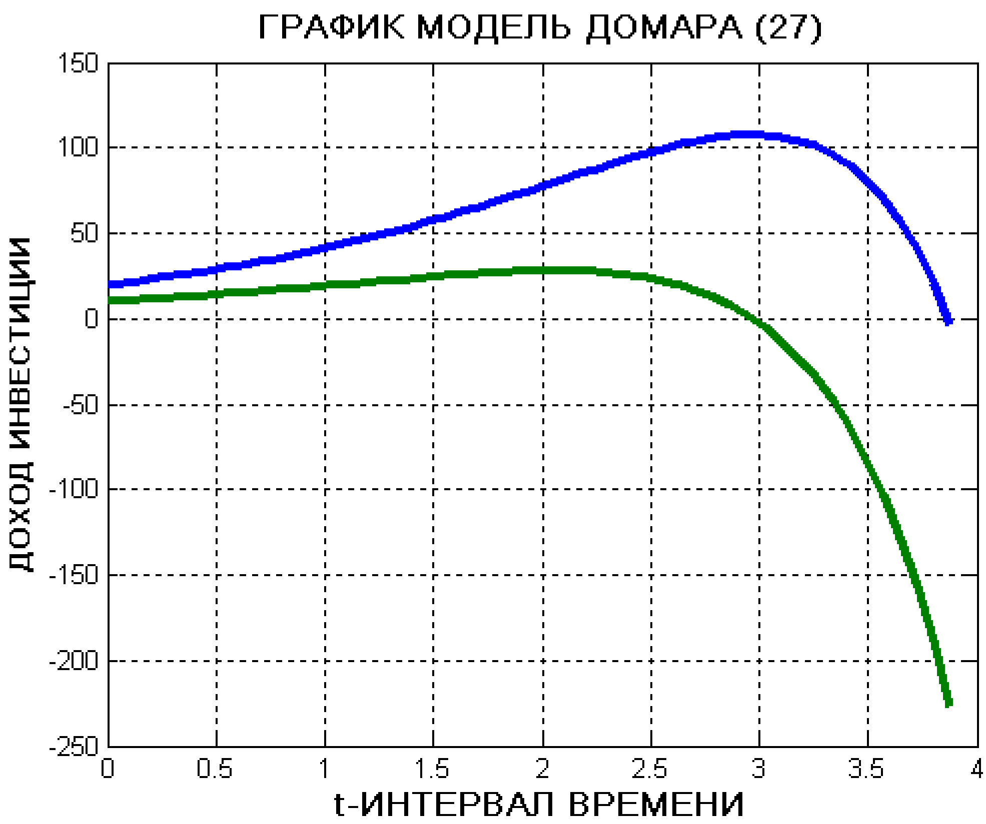


Рис. 12

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2
«ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ Р.СОЛОУ- Т.СВАНА»

1. Краткие теоретические сведения

Модель построена на следующих постулатах :

1.Рассматривается однопродуктовая закрытая экономика без государства;

2. Абстрагируются:
- от индивидуальных предпочтений домашних хозяйств;
-от наличия разных производящих секторов в экономике;
-от существования в экономике взаимозависимостей.

3. В экономике имеется большое число одинаковых репрезентативных домохозяйств, т.е. спрос и предложение труда могут быть представлены на примере единственного домохозяйства. Домохозяйства владеют всем наличным трудом и капиталом и полностью их поставляют на рынок. При этом имеет место полная занятость.

4. В экономике имеется очень большое число одинаковых репрезентативных фирм, т.е. все фирмы характеризуются одной и той же неоклассической ПФ:

$$Y(t) = F(K(t),L(t),A(t))$$

Где
Y(t) – доход (конечный произведенный продукт) в период t
K(t) - капитал в экономике в периодt
L(t) -труд в экономике в период t
A(t) – технология в экономике впериод t (она находится в свободном доступе, т.е является неконкурентным и не исключаемым благом)

5. Свойства неоклассической ПФ

ПФ является дважды дифференцируемой по Kи Lи удовлетворяет неравенствам:

$$F_K(K,L,A) \equiv \frac{\partial F(K,L,A)}{\partial K} > 0 F_L(K,L,A) \equiv \frac{\partial F(K,L,A)}{\partial L} > 0$$

$$F_{KK}(K,L,A) \equiv \frac{\partial^2 F(K,L,A)}{\partial K^2} < 0 F_{LL}(K,L,A) \equiv \frac{\partial^2 F(K,L,A)}{\partial L^2} < 0$$

$$F\ \ (0,L,A) = F\ \ (K,0,A) = 0 F\ \ (\infty,L,A) = F\ \ (K,\infty,A) = \infty$$

ПФ обладает постоянной отдачей от масштаба, т.е. является линейно однородной:

$$F\ \ (\gamma K, L, A) = \gamma F\ \ (K, L, A)$$

6.Эндогенные факторы:

-Y(t) – доход (конечный продукт) в период t;
- C(t) - потребление в период t;
-S(t) - сбережение в период t;
-Inv(t)- инвестиции в период t;
-K(t) - капитал в период t;
-ΔK(t+1) - прирост капитала в период t+1;
-K(t+1) - капитал в период t+1;
- L(t) - население в период t;
- L(t+1) - население в период t+1.

7.Экзогенные факторы:
- s =const -норма сбережения
- δ=const норма выбытия капитала
- n=constтемп роста населения
- K0 -капитал в период t=0.
- L0 – население в период t=0.
- F(K(t),L(t),A(t))- неоклассическая ПФ.

1.1 Базовый объемный вариант модели Солоу-Свана в дискретном времени (основные уравнения и логика движения экономики).

1.Объем выпуска (национального дохода) в любой период дискретного времени t определяется уравнением**:**

$$\mathrm{Y(t)} = \mathrm{F(K(t), L(t), A(t))} \ \ (1)$$

2.Доход должен быть равен сумме сбережений и потребления (уравнение Кейнса):

$$\mathrm{Y(t)} = C(t) + S((t) \ \ (2)$$

$C(t)$ – потребление в период t; $S((t)$- сбережения в период t

Сбережения формируются домашними хозяйствами в экономике как некоторая постоянная доля sдохода (норма сбережения s=const), тогда имеем:

$$S((t) = s\mathrm{Y(t)} \ \ (3)$$

Потребление из (2) и (3) будет тогда равно:

$$C(t) = \mathrm{Y(t)} - S((t) = \mathrm{Y(t)} - s\mathrm{Y(t)} = (1 - s)\mathrm{Y(t)} \quad (4)$$

3.Считается, что все сбережения идут на инвестиции в капитал:

$$S((t) = s\mathrm{Y(t)} = Inv(t) = s\mathrm{F}(\mathrm{K(t), L(t), A(t)}) \quad (5)$$

4. Инвестиции в период t тратятся на восстановление капитала, который износился за этот период (капитал теряет свою стоимость с темпом $\delta \in (0{,}1)$, т. е. за период t будет потеряно $\delta K(t))$ капитала) и на приобретение нового капитала на период t+1 .
Следовательно, имеем:

$$Inv(t) = \Delta K(t+1) + \delta K(t) \; (6)$$

$$K(t+1) = K(t) + \Delta K(t+1) \quad (7)$$

Из (6) и (5) получаем:

$$\Delta K(t+1) = Inv(t) - \delta K(t) = s\mathrm{F}\big(\mathrm{K(t), L(t), A(t)}\big) - \delta K(t) \quad (8)$$

Подставляя (8) в ((7), получаем основное уравнение движения капитала в модели Солоу-Свана:

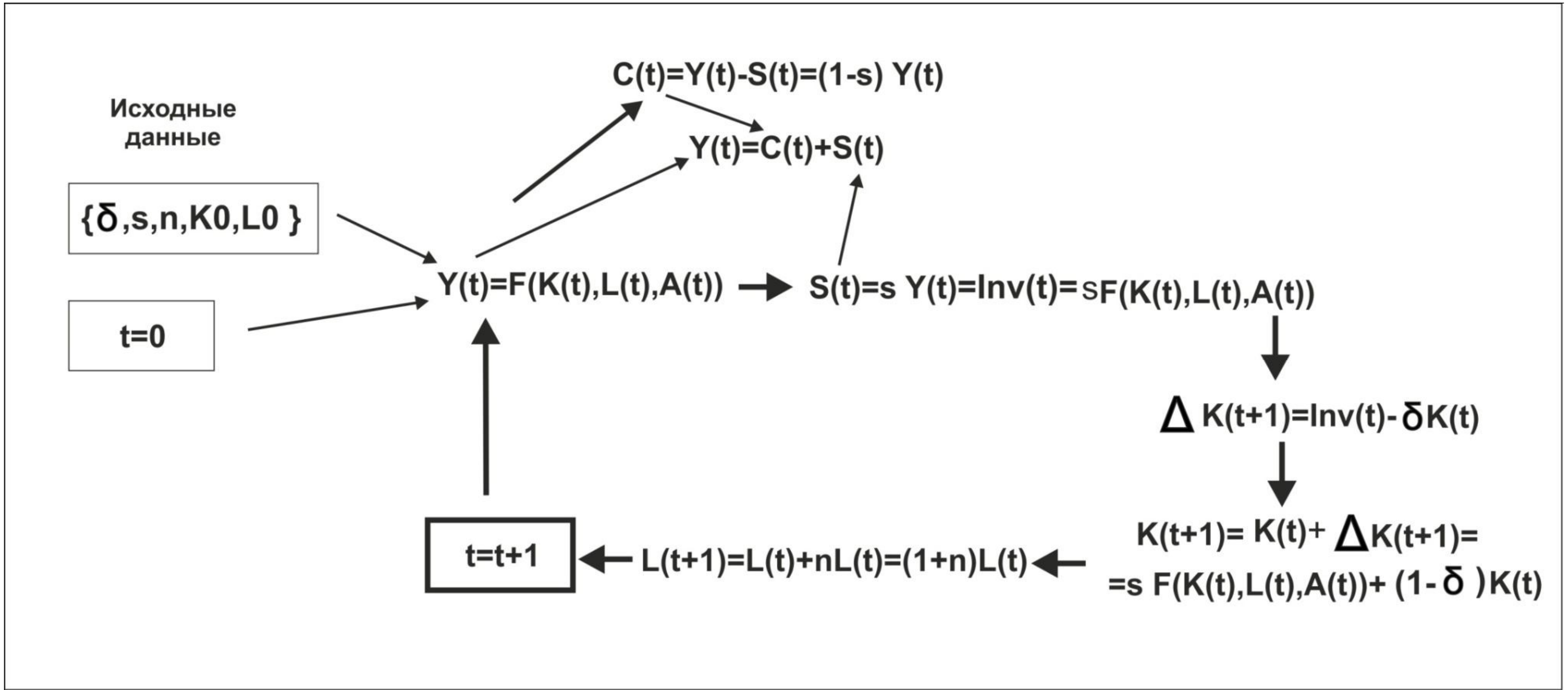
$$K(t+1) = s\mathrm{F}\big(\mathrm{K(t), L(t), A(t)}\big) + (1 - \delta)\, K(t) \quad (9)$$

5. Труд (население) в модели считается растущим спостоянным темпом n:

$$\mathrm{L(t+1) = L(t) + nL(t) = (1+n)L(t)} \quad (10)$$

$$\mathrm{L(t)} = (1 + n)^{\mathrm{t}}\mathrm{L}(0) = \mathrm{L}(0)\mathrm{e}^{\mathrm{nt}} \quad (11)$$

6. Логика движения экономики по Солоу в дискретном времени представлена на рис.1



Экзогенные переменные

δ - норма амортизации капитала;
s - норма сбережения;
n - темп роста населения;
K0 - капитал в период **t=0;**
F(K(t),L(t),A(t)) - неоклассическая производственная функция.

Эндогенные переменные

Y(t) - доход в период t;
C(t) - потребление в период t;
S(t) - сбережения в период t;
K(t) - капитал в период t;
ΔK(t+1) - прирост капитала в период t+1;
K(t+1) - капитал в период t+1.

Рис. 1

1.2 Базовый удельный вариант модели Солоу-Свана в дискретном времени (основные уравнения и логика движения экономики).

Рассмотрим удельный вариант модели, в котором рассматриваются соответствующие экономические величины приведенные к одному работнику.

1. Разделим обе части уравнения (1) на $L(t)$получим:

$$\frac{Y\,(t)}{L(t)} = F(\frac{K\,(t)}{L(t)},1,\mathrm{A(t)}) \text{ или } y(t) = f(k(t))(12)$$

где

$y = \frac{Y\,(t)}{L(t)}$ - доход на душу населения т.е. производительность труда;

$k = \frac{K\,(t)}{L(t)}$- капиталовооруженность ;

A(t)=1 - технологический прогресс отсутствует.

2. Аналогично из (3) (4) и (5) имеем:

$$s^{\wedge}(t) = sy(t) \quad (13)$$

$$c(t) = (1-s)\mathrm{y(t)} \ (14)$$

$$inv(t) = sy(t) = sf(k(t)) \ (15)$$

где
$s^{\wedge}(t)$ - сбережение на душу населения;
$c(t)$ - потребление на душу населения.
$inv(t)$- инвестиции на душу населения.

3. Из уравнений ((5) (6) имеем:

$$\frac{\Delta K_{t+1}}{L_t} = \frac{sF(K_t, L_t)}{L_t} - \delta \frac{K_t}{L_t}$$

Так как$\Delta K_{t+1} = \frac{dK}{dt}\Delta t = \frac{dK}{dt} = K'$и $\frac{sF(K_t,L_t)}{L_t} = sF\left(\frac{K_t}{L_t},1\right) = sf(k)$получаем:

$$\frac{K'}{L_t} = sf(k) - \delta k \ (16)$$

Найдем $k' = \frac{d\frac{K}{L}}{dt} = \frac{K'L_t - L'K_t}{L_t^2} = \frac{K'}{L_t} - \frac{K_t}{L_t}\frac{L'}{L_t} = \frac{K'}{L_t} - k\frac{nL_0}{L_0}\frac{e^{nt}}{e^{nt}}$, следовательно:

$$\frac{K'}{L_t} = k' + \ kn \quad (17)$$

Из (16)и (17) имеем :

$$k' = \ sf(k) - (n + \delta)k \ \ (18)$$

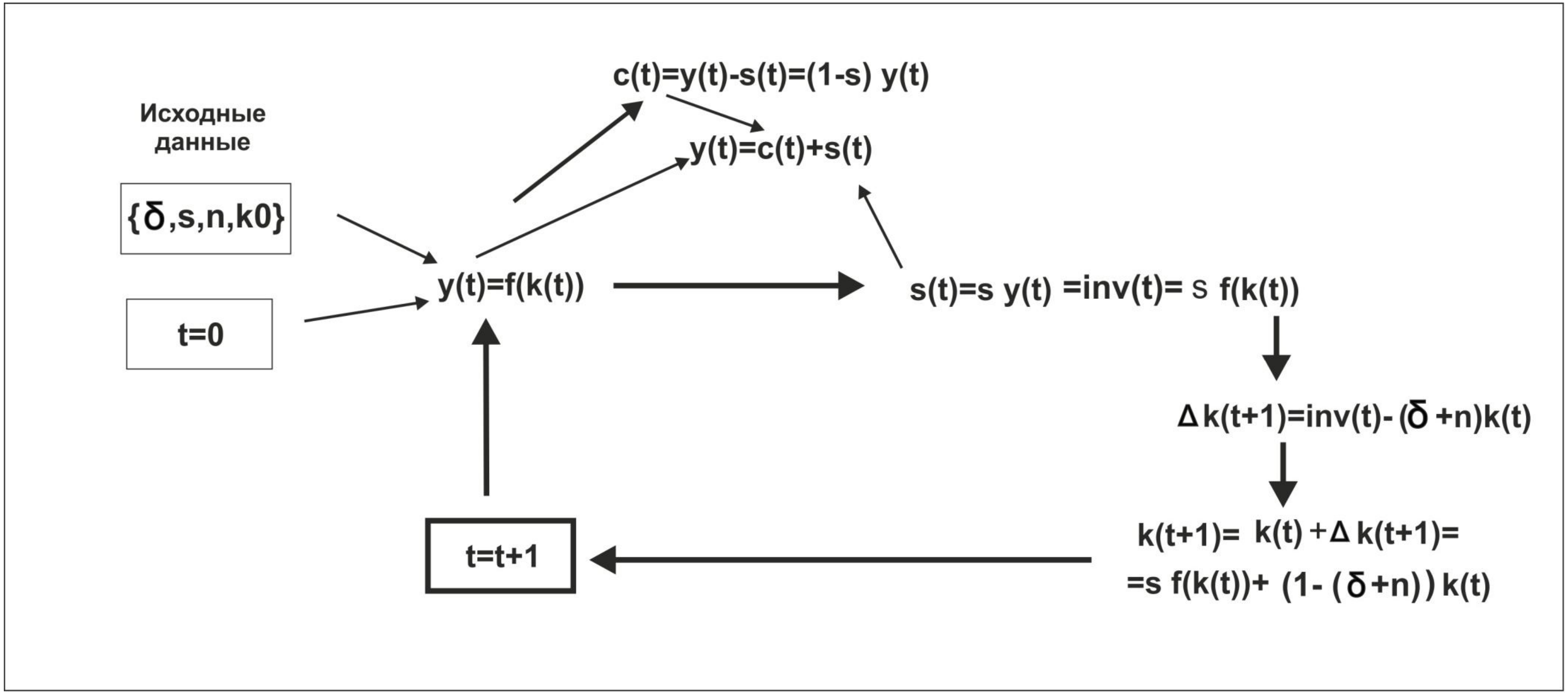
Разностный аналог уравнения (18) имеет вид:

$$\Delta k_{t+1} = sf(k_t) - (n + \delta)k_t \ \ (19)$$

Тогда имеем:

$$k_{t+1} = k_t + \Delta k_{t+1} = \ sf(k_t) + (1 - (n + \delta))k_t \ \ (20)$$

4. Логика движения экономики по Солоу в удельном варианте и дискретном времени представлена на рис.2



Экзогенные переменные

δ - норма амортизации капитала;
s - норма сбережения;
n - темп роста труда;
k0 - капиталовооруженность в период t=0;
f(k(t)) - неоклассическая удельная производственная функция.

Эндогенные переменные

y(t) - производительность труда в период t;
c(t) - потребление 1 работника в период t;
s(t) - сбережения 1 работника в период t;
k(t) - капиталовооруженность в период t;
Δ k(t+1) - прирост капиталвооруженности в период t+1;
k(t+1) - капиталовооруженность в период t+1.

Рис. 2

1.3 Анализ модели Солоу-Свана

1. Стационарное состояние экономики.

ПФ $f(k_t)$, определяющая объем выпуска на душу населения$y(t)$в любой момент времени t, является монотонно возрастающей функцией от капиталовооруженности k_t , т. е имеем:

$$\infty > \frac{df}{dk} \geq 0 \text{и} \quad \frac{d^2 f}{dk^2} < 0 \quad (21)$$

Следовательно, $0 =< f(k_t) < b = const$ при$0 =< k(t) < \infty$. То есть

$$\begin{matrix} k(t) \to 0 \;\; f\big(k(t)\big) \to 0 \;\; \text{и} \;\; sf\big(k(t)\big) \to 0 \\ k(t) \to \infty \;\; f\big(k(t)\big) \to b \;\; \text{и} \;\; sf\big(k(t)\big) \to sb \end{matrix} \quad (22)$$

$$k(t) \to 0 \;\; \frac{df}{dk} \to \infty \;\; \text{и} \;\; k(t) \to \infty \;\; \frac{df}{dk} \to 0 \qquad (23)$$

Динамика функции k(t) зависит от соотношения динамик капитала и населения, если капитал растет быстрее населения, то $k(t)$возрастает при обратном соотношении падает. Можно показать, что существует такое состояние, к которому стремится экономика, где $k(t)$=const=k^*, то есть $k' = 0$. В этом состоянии темп роста выпуска, потребления и капитала равны темпу роста населения. Такое состояние экономики называется стационарным, точка k^* стационарной. Найдем стационарную точку из условия:

$$0 = sf(k^*) - (n+\delta)k^* \to k^* = \frac{sf(k^*)}{(n+\delta)} \quad (24))$$

Стационарную точку можно найти и графически рис 3

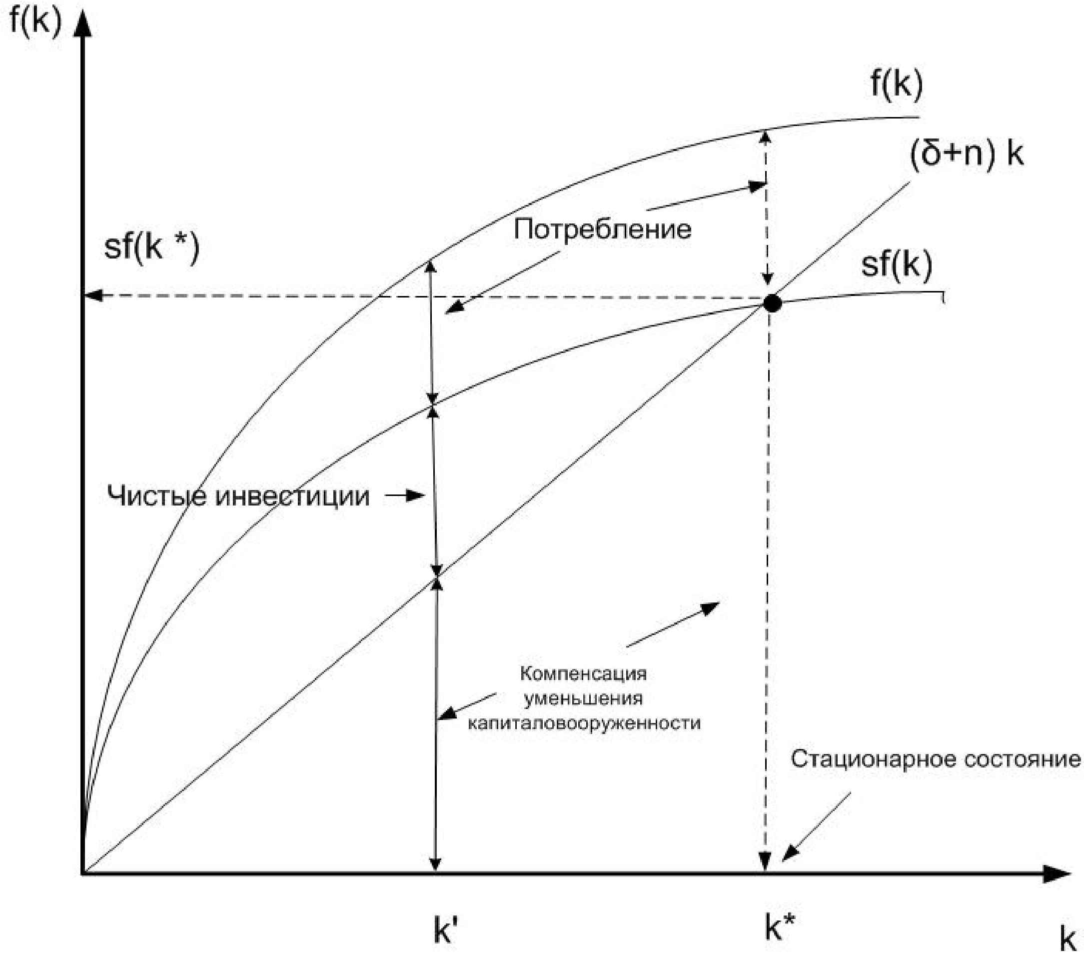


Рис. 3

На рис. 4 представлены: функция $f(k)$- объем выпуска на душу населения, функция $sf(k)$ - объем сбережений на душу населения и функция $(n+\delta)k$, характеризующая объем инвестиций на душу населения необходимых для обеспечения постоянства капиталовооруженности. Точка пересечения $sf(k)$ и $(n+\delta)k$ представляет собой стационарную точку k^*. В интервале (0, k^*]$sf(k)$>$n+\delta)k$т.е. инвестиций в экономике больше, чем это необходимо для обеспечения постоянства капиталовооруженности. Рассмотрим экономику в точке$k' \in (0, k^*]$и $k' < k^*$в этой точке величина $sf(k') - (n+\delta)k'$представляет собой чистые инвестиции на душу населения, которые увеличивают капиталовооруженность, а величина $f(k') - sf(k')$ характеризует объем потребления на душу населения. В стационарной точке k^* , $sf(k^*) - (n+\delta)k^* = 0$ т.е чистые инвестиции равны нулю, а объем потребления равен $f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - (n+\delta)k^*$

Докажем существование стационарной точки. Рассмотрим точку в окрестности начала координат $k_n = 0 + \varepsilon = \varepsilon$где $\varepsilon > 0$ положительная бесконечно малая величина, тогда $sf(k_n) = s\,\varepsilon\frac{df}{dk}$ и $\varepsilon(n+\delta)$ из (23) имеем $\frac{df}{dk} > (n+\delta)$,следовательно:

$$sf(k_n) > k_n(n+\delta)$$

Рассмотрим точку в окрестности конца координат $k_k = \hat{k_k} + \varepsilon = \infty - \varepsilon + \varepsilon$тогдаиз (22) $sf(k_k) = sf(\hat{k_k}) + \ s\varepsilon\frac{df}{dk} = sb + s\varepsilon\frac{df}{dk}$ и $\hat{k_k}(n+\delta) + \varepsilon(n+\delta)$ из (23) имеем $\frac{df}{dk} < (n+\delta)$ и $sb < \hat{k_k}(n+\delta)$,следовательно:

$$sf(k_k) < k_k(n+\delta)$$

Таким образом, так как функция $f\big(k(t)\big)$в интервале (0, ∞) монотонно возрастающая, гладкая, непрерывная и удовлетворяющая условиям (21, 22) и k$(n+\delta)$линейно растущая функция, то в этом интервале обязательно выполняется условие:

$$sf(k^*) = \ k^*(n+\delta) \quad (25)$$

Это эквивалентно существованию стационарной точки.

2. Золотое правило накопления капитала

Из (24) видно, что стационарное состояние экономики зависит от нормы сбережения s, а следовательно, от нормы сбережения зависит и потребление на душу населения в стационарной точке. Как изменяется стационарное потребление на душу населения при изменении нормы сбережения и какова норма сбережения, которая максимизирует стационарное потребление. Из (14) имеем:

$$c(k^*(s)) = f(k^*(s)) - sf(k^*(s)) \quad (26)$$

Из (25) имеем:

$$c(k^*(s)) = \ f(k^*(s)) - k^*(s)(n+\delta) \quad (27)$$

Тогда условие максимума потребления имеет вид:

$$\frac{dc(k^*(s))}{ds} = \frac{d[f\big(k^*(s)\big) - k^*(s)(n+\delta)]}{ds} = \frac{df\big(k^*(s)\big)}{dk}\frac{dk^*(s)}{ds} - (n+\delta)\frac{dk^*(s)}{ds} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{df\big(k^*(s)\big)}{dk} = (n+\delta) \quad (28)$$

Стационарная капиталовооруженность получаемая из уравнения (28) называется капиталовооруженностью, соответствующей золотому правилу и обозначается k^g

$$\frac{df(k^g)}{dk} = (n+\delta) \quad (29)$$

Уравнение (29) определяющее стационарную капиталовооруженность максимизирующую стационарное потребление называется золотым правилом накопления капитала. Из (25) и (29) имеемнорму сбережения, обеспечивающую максимальное потребление на душу население :

$$s^g f(k^g) = k^g(n+\delta) \rightarrow$$

$$s^g = \frac{k^g(n+\delta)}{f(k^g)} \quad (30)$$

Величина максимального стационарного потребления определяетсяиз уравнения:

$$c^g = f(k^g) -)(n+\delta)k^g \quad (31)$$

Проиллюстрируем золотое правило накопления капитала графически (рис. 4).Капиталовооруженность в стационарном состоянии экономики k^g соответствует золотому правилу, так как определяется нормой сбережения s^g , которая задает максимальное стационарное потребление на душу населения c^g. Уменьшение нормы сбережения $s^2 < s^g$ и ее увеличение $s^1 > s^g$ уменьшают стационарное потребление на душу населения, т.е. $c^2 < c^g$ и $c^1 < c^g$. При этом угол наклона касательной к функции выпуска $f(k \quad)$ в точке k^g равен $n + \delta$,что эквивалентно условию (29).

При переходе экономики из стационарного состояния с нормой сбережения с s^1 к стационарному состоянию с нормой s^g $(s^1 > s^g)$ увеличивается соответственно стационарное потребление на душу населения с уровня c^1 до уровня c^g. Но процесс этот не одномоментный, а имеет следующий вид (рис. 5). То есть экономика имеющая ному сбережения больше чем s^g сберегает слишком много и распределение ресурсов в этом случае является динамически неэффективным. Если норма сбережения в экономике s^2 и меньше чем s^g , то увеличив ее до уровня s^g мы увеличиваем стационарную капиталовооруженность с уровня k^2 до уровня k^g, но в переходный период потребление на душу населения остается ниже c^g (рис.6). Однозначно определить эффективно распределяются ресурсы или нет нельзя, потому что нельзя оценить, что важнее текущее состояние или будущее.

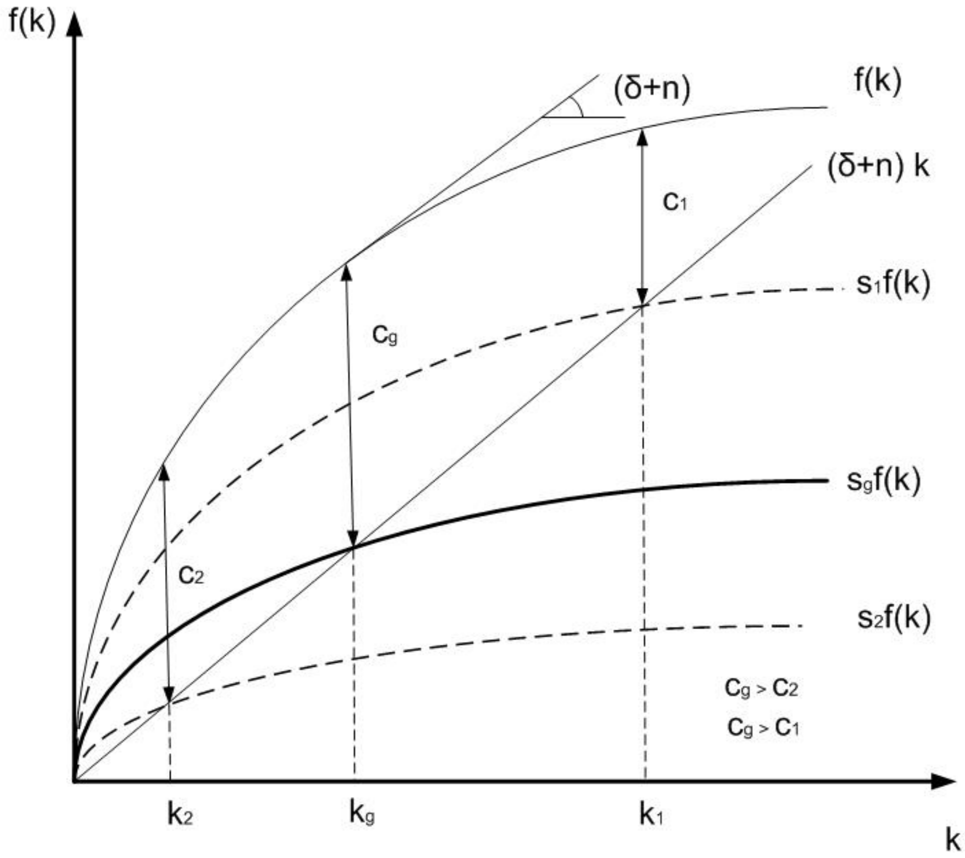

f(k)
(δ+n)
f(k)
(δ+n) k
c1
s1f(k)
cg
sgf(k)
c2
s2f(k)
cg > c2
cg > c1
k2
kg
k1
k

Рис. 4

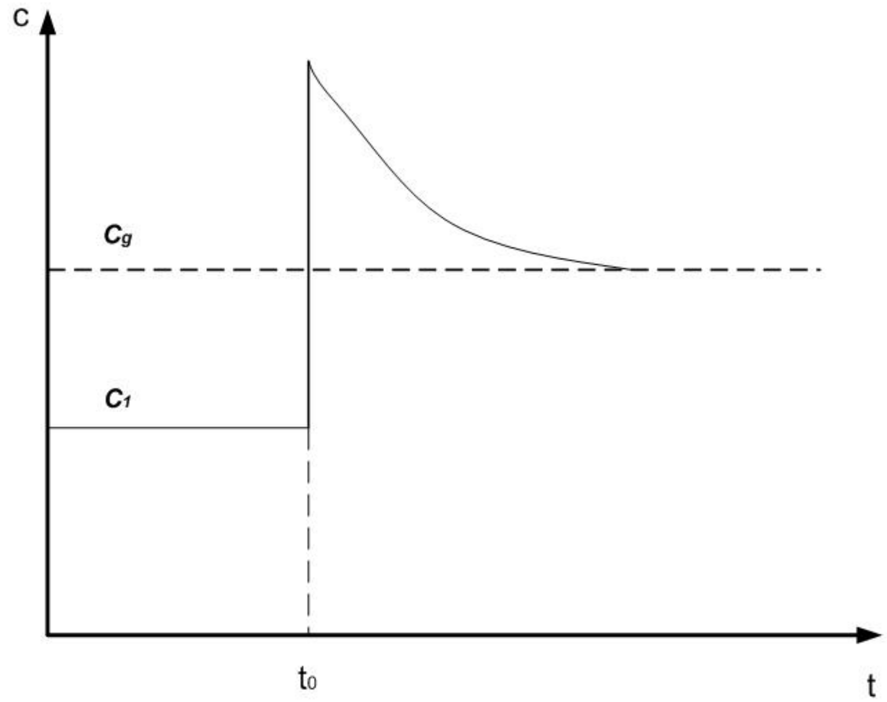

c
cg
c1
t0
t

Рис. 5

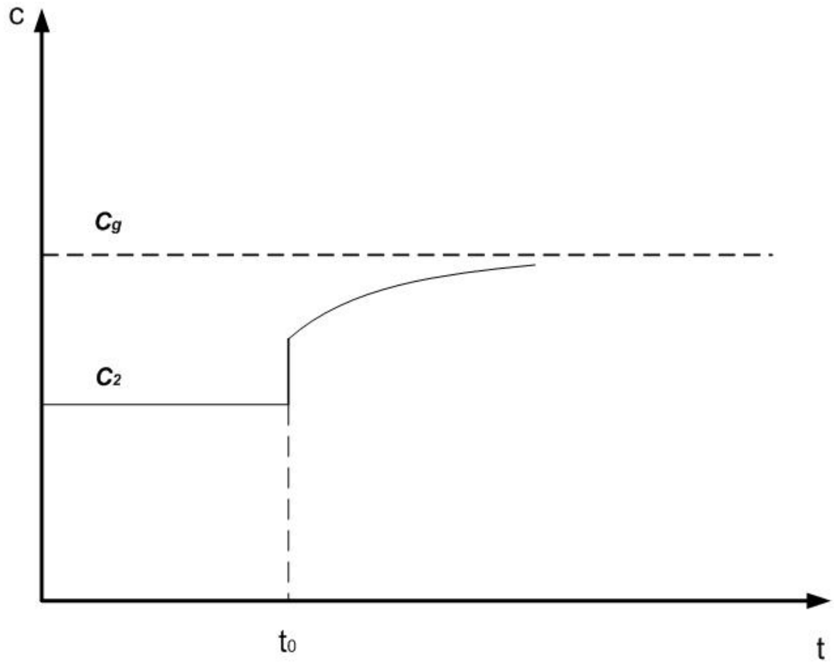


Рис. 6

3. Экономический рост: долгосрочная динамика и переходный период.

В стационарном состоянии капиталовооруженность постоянна, следовательно, постоянна и производительность труда. Таким образом, долгосрочный рост выпуска не зависит от экзогенных параметров нормы сбережения и нормы амортизации, а зависит только от темпов роста населения. Однако эти экзогенные параметры влияют на производительность труда в переходный период при движении экономики к стационарному состоянию.

Рассмотрим, чем определяется темп роста капиталовооруженности на равновесной траектории. Поделим обе части уравнения (18) на kполучим уравнение динамики темпа роста капиталовооруженности:

$$\frac{k'}{k} = \frac{sf(k_t)}{k} - (n + \delta) \quad (32)$$

Изобразим динамику экономики в модели Солоу, описываемую уравнением (32) графически (рис. 7).

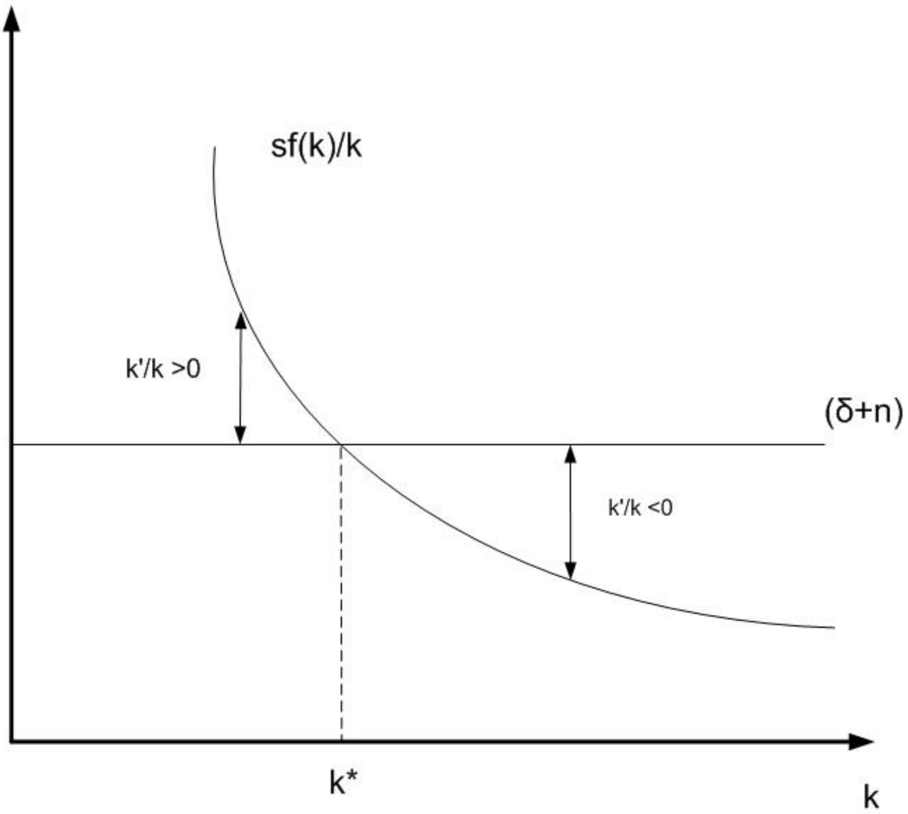


Рис. 7

Как видно $\frac{sf(k_t)}{k}$ является убывающей функцией k. Расстояние по вертикали между $\frac{sf(k_t)}{k}$ и $(n+\delta)$ является темпом роста капиталовооруженности $\frac{k'}{k}$ в точке пересечения (в стационарной точке k^*) $\frac{k'}{k} = 0$. Слева от стационарной точки $\frac{k'}{k} > 0$, а справа $\frac{k'}{k} < 0$. Динамика темпа роста производительности труда аналогична динамике темпа роста капиталовооруженности. Продифференцируем уравнение (12) имеем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dk}\frac{dk}{dt} \text{или } y' = f'k' \quad (33)$$

Разделим обе части уравнения (33)на y получаем:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'}{f}k' = \frac{f'k}{f}\frac{k'}{k} = s_k\,\frac{k'}{k} (34)$$

Анализируя стационарное состояние можно сделать следующее заключение, что стационарное состояние зависит от нормы сбережения, нормы амортизации и темпа роста населения.

а) Изменение нормы сбережения.

При повышении нормы сбережения с s1 до s2 кривая $sf(k)$смещается вверх и стационарная точка перемещаетсяиз k^1 в k^2 т.е. стационарная капиталовооруженность возрастает (рис.8).

Как видно из рис.8 при росте нормы сбережения темп роста капиталовооруженности скачком возрастает и становится выше темпа роста населения, но по мере роста капиталовооруженности темп ее роста постепенно снижается и точке пересечения $(n + \delta)$ и $s_2 f(k) k^2$становиться равной нулю.

Таким образом, в долгосрочной перспективе повышение нормы сбережения не влияет на темпы роста капиталовооруженности и выпуска, но влияет на темпы роста в процессе движения к новому стационарному состоянию.

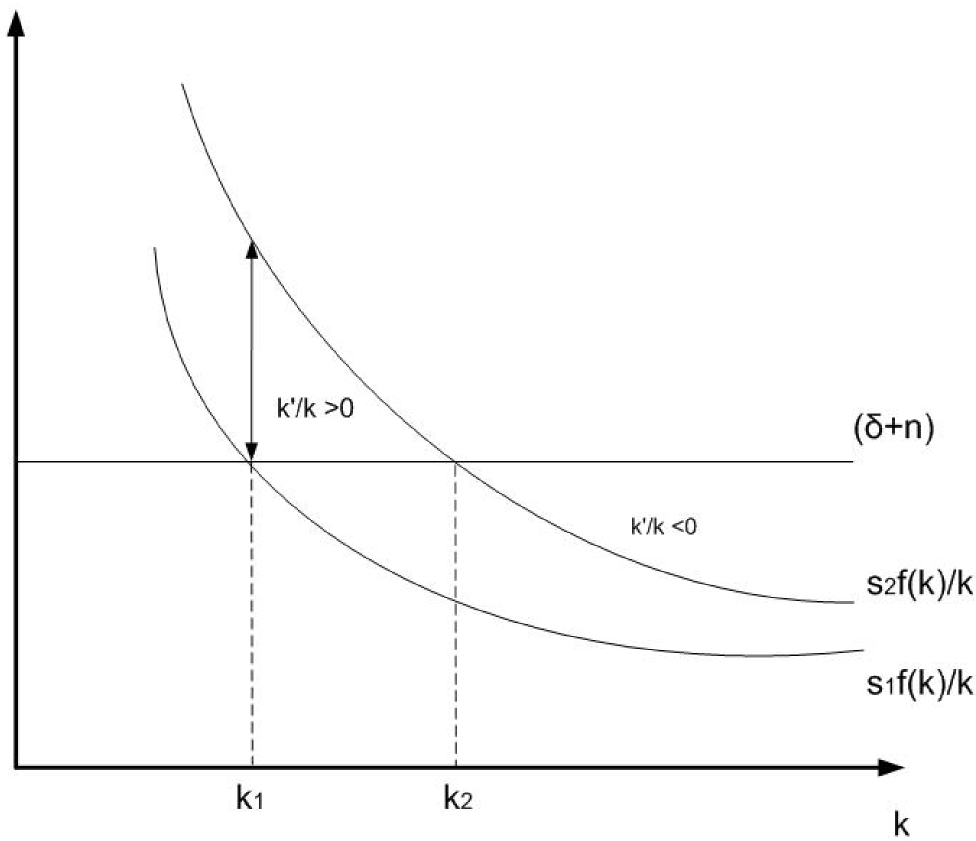


Рис. 8

б) Изменение темпов роста населения.

При повышении темпов роста населения с n1 до n2 стационарная капиталовооруженность уменьшается с k1 до k2, а темпы ее роста скачком уменьшаются до некоторого отрицательного значения. Экономика начинает двигаться так, что капиталовооруженность начинает падать, а темп ее роста увеличиваться. Это происходит до тех пор пока не будет достигнута новая стационарная точка k2, здесь темп рост капиталовооруженности становится равным нулю. (рис.9). Аналогичную динамику демонстрирует и производительность труда.

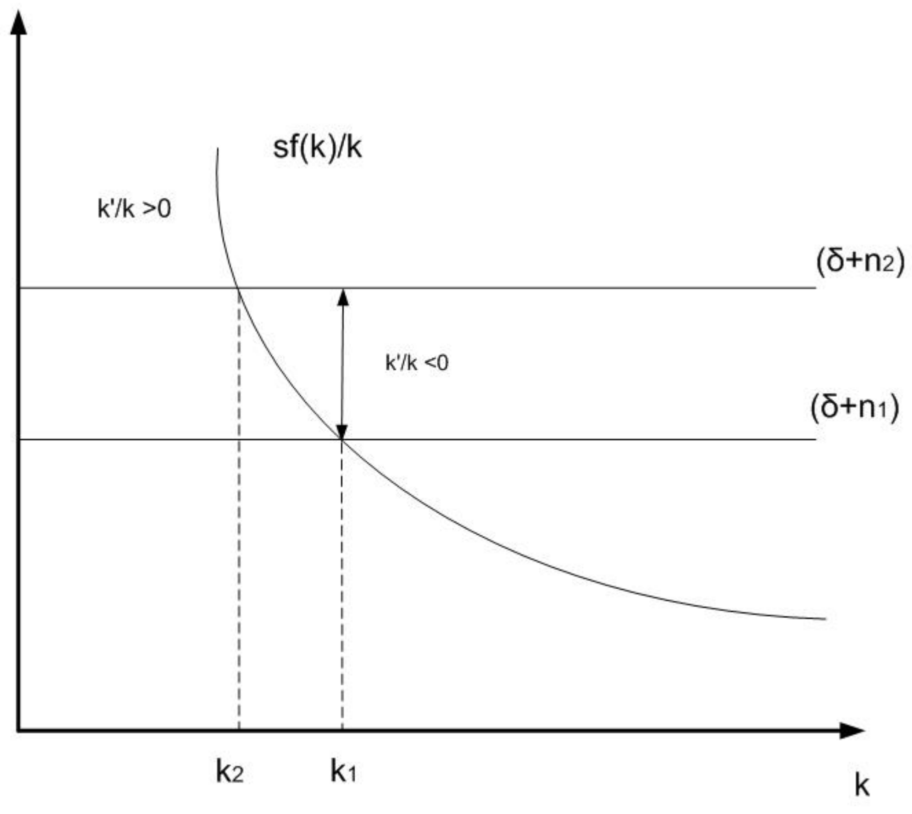


Рис. 9

Если имеется группа стран с одинаковыми нормами сбережения и амортизации капитала, темпом роста населения и одинаковыми технологиями, то они имеют одну и ту же стационарную капиталовооруженность. При этом каждая из стран может иметь различные текущие значения капиталовооруженности. Согласно модели Солоу, чем дальше отстоит текущие значение капиталовооруженности от стационарного, тем более высокие темпы ее роста будут наблюдаться. Следовательно, отстающие страны будут догонять передовые, т.е должна иметь место абсолютная конвергенция.

Но на практике этого не наблюдается, так как разные страны имеют разные нормы сбережения и амортизации, темпы роста населения и технологии, а значит и разные стационарные точки. При этом, те страны текущие значение капиталовооруженности которых дальше отстает от их стационарных значений, должны развиваться быстрее, т.е. имеет место относительная конвергенция.

4. Модель Солоу с трудосберегающим техническим прогрессом (AL-модель).

До сих пор в модели технология считалась неизменной, следовательно, капиталовооруженность и производительность трудав долгосрочной перспективе также являются неизменными, что противоречит экономическим реалиям. Для того, чтобы учесть тот факт, что технологии под влиянием НТП постоянно меняются, необходимо учитывать влияние НТПв модели. Учесть это влияние можно разными способами, что приводит к разным типам НТП: нейтральный, капиталосберегающий и трудосберегающий.

Нейтральный НТП позволяет произвести продукцию при меньших затратах капитала и труда:

$$Y = F\ \ (K, L, A) = AF\ \ (K, L)\ \ (35)$$

Капиталосберегающий НТП увеличивает выпуск за счет повышения эффективности использования капитала:

$$Y = F\ \ (K, L, A) = F\ \ (AK, L)\ \ (36)$$

Трудосберегающий НТП увеличивает выпуск за счет повышения эффективности использования труда:

$$Y = F\ \ (K, L, A) = F\ \ (K, AL)(37)$$

Если считать НТП имеет постоянный темп роста:

$$\frac{dA}{dt}/A = g(38)$$

То только трудосберегающий НТП обеспечивает существование стационарного состояния экономики.

Запишем условие равновесия с учетом трудосберегающего НТП:

$$\frac{dK}{dt} + \sigma K_t = sF(K_t, A_t L_t)(39)$$

Перепишем условие (39) для одного эффективного работника:

$$\frac{\left(\frac{dK}{dt}\right)}{A_t L_t} + \frac{\sigma K_t}{A_t L_t} = \frac{sF(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t} = sF(\frac{K_t}{A_t L_t}, 1)(40)$$

Введем обозначения $k_A = \frac{K_t}{A_t L_t}$и $y_A = \frac{Y_t}{A_t L_t}$тогда получаем :

$$\frac{dk_A}{dt}=\frac{d\left(\frac{K_t}{A_tL_t}\right)}{dt}=\frac{\frac{dK}{dt}AL-K\frac{d(AL)}{dt}}{(AL)^2}=\frac{\frac{dK}{dt}AL-AK\frac{dL}{dt}-LK\frac{dA}{dt}}{(AL)^2}=\frac{\frac{dK}{dt}}{AL}-\frac{\frac{dL}{dt}}{L}\frac{K}{AL}-\frac{\frac{dA}{dt}}{A}\frac{K}{AL}=$$

$$=\frac{\frac{dK}{dt}}{AL}-\frac{K}{AL}\left(\frac{\frac{dL}{dt}}{L}+\frac{\frac{dA}{dt}}{A}\right)=\frac{\frac{dK}{dt}}{AL}-k_A(\text{n+g}) \quad (41)$$

Отсюда $\frac{\frac{dK}{dt}}{AL}=\frac{dk_A}{dt}+k_A(\text{n+g})$ (42) , подставляя (42) в (40) получаем:

$\frac{dk_A}{dt}+k_A(\text{n+g})+\ \sigma k_A=sf(k_A)$следовательно имеем:

$$\frac{dk_A}{dt}=sf(k_A)-k_A(n+\sigma+g)(43)$$

Уравнение (43) описывает накопление капитала при наличии трудосберегающего НТП. Стационарное состояниепри котором$\frac{dk_A}{dt}=0$определяется из условия:

$sf(k_A^*)=k_A^*\ \ (n+\sigma+g)(44)$

В стационарном состоянии капитал на одного эффективного работникаk_Aпостоянен, следовательно, $y_A=f(k_A)$и $c_A=(1-s)y_A$тоже постоянны. А так как $k_A=\frac{k}{A}\rightarrow k=Ak_A$, то капиталовооруженность, производительность трудаyи потреблениесв стационарном состоянии должны расти с темпом gНТП. При этом запас капитала Kи уровень выпуска Yв стационарном состоянии растут с темпом $(n+g)$. Норма сбережения, норма амортизации и производственная функция влияют только на траекторию перехода к стационарному состоянию, но не влияют на темпы роста в стационарном состоянии.

Таким образом, темп роста экономики выпуск на душу населения при полной занятости в модели Солоу полностью определяется темпом роста НТП. Но из этой модели остается полностью непонятным, чем определяется темп самого НТП.

ЗАДАНИЕ ПОЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1 «ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ СОЛОУ-СВАНА»

Исследование дискретной модели

Разработайте m-программу исследования удельной дискретной модели Солоу без НТП, которая позволяет:

1. Рассчитать значение капиталовооруженности в стационарной точке k^*и точке, соответствующей золотому правилу накопления капитала k^g(для этого необходимо использовать соотношения 25 и 29)

2. Строить графики y(t), k(t), inv(t), c(t)

3. Строить график движения экономики к стационарной точкеk^*и графически определяет ее (рис. 3).

4. Строить графики, позволяющие графически определить точку k^g,соответствующую золотому правилу накопления капитала (рис. 4)

5. Строить графики, описывающие темпы прироста капиталовооруженности при разных нормах сбережения (рис. 8).

6. Строить графики, описывающие темпы прироста производительности труда при разных нормах сбережения.

Исходные данные:

s-норма сбережения	d-норма амортизации капитала	n-темп роста труда	a-коэффициент эластичности капитала
0.5-0.8	0.25-0,35	0.01-0.04	0.6-0.8

f - производственная функция	k(1)	Уровни вариации нормысбережения s	Интервал моделирования [1, T]
k^a	0.1	$s^g - 0.1, s^g, s^g + 0.1$	[1, 100]

ПРИМЕР ПРОГРАМЫ ДЛЯИССЛЕДОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ УДЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ СОЛОУ-СВАНА БЕЗ НТП В СРЕДЕ MATLAB.

```
clc
clearall
%УДЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СОЛОУ БЕЗ НТП ДИСКРЕТНЫЙ ВАРИАНТ
%ЗАДАНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
%горизонт прогноза
T=100;
%норма амортизации капитала
d=0.3;
%норма сбережения
s=0.8;
% темп роста труда
n=0.01;
%коэффициент эластичности капитала
a=0.7;
%РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ
b=a-1;
h=(n+d)/s;
ks=h^(1/b);
%РАСЧЕТ НОРМЫ СБЕРЕРЕЖЕНИЯ ДЛЯ ЗОЛОТОГО ПРАВИЛА
h1=(n+d)/a;
kg=h1^(1/b);
sg=(kg*(n+d))/kg^a;
%МОДЕЛИВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИКИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ СОЛОУ И ЕЕ ГРАФИ-
ЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
%%начальное значение капиталовооруженности
for j=1:1:T
k(j)=0;
 c(j)=0;
 inv(j)=0;
 y(j)=0;
end
k(T+1)=0;
t=1;
k(t)=0.1;
%Расчет эндогенных переменных модели для t
%выпуск
y(t)=k(t)^a;
%потребление
c(t)=(1-s)*y(t);
%инвестиции
inv(t)=s*y(t);
%прирост капиталовооруженности
k(t+1)=s*y(t)+(1-(d+n))*k(t);
for  t=2:1:T
 t;
 y(t)=k(t)^a;
 c(t)=(1-s)*y(t);
 inv(t)=s*y(t);
 k(t+1)=s*y(t)+(1-(d+n))*k(t);
end
k(T+1)=[];
X=1:1:T;
%ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРОВ ЭКОНОМИКИ СОЛЛОУ
figure(1)
subplot(221)
plot(X,y,'LineWidth',2)
```

```
title('y(t)')
xlabel('t')
ylabel('y')
grid on
subplot(222)
plot(X,k,'LineWidth',2)
title('k(t)')
xlabel('t')
ylabel('k')
grid on
subplot(223)
plot(X,c,'LineWidth',2)
title('c(t)')
xlabel('t')
ylabel('c')
grid on
subplot(224)
plot(X,inv,'LineWidth',2)
title('inv(t)')
xlabel('t')
ylabel('inv')
grid on
y;c;inv;k;
%ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ ЭКОНОМИКИ СОЛОУ
y1=s*y;
y2=(n+d)*k;
figure(2)
plot(k,y, k, y1,'-r',k,y2,'-g','LineWidth',2 );hold on;
k1=max(k);
yy=max(y1);
ym=max(y);
nr1=num2str(ks,3);
plot (k1,yy,'ob','MarkerSize',8,'LineWidth',2)
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('СТАЦИОНАРНОЕСОСТОЯНИЕЭКОНОМИКИСОЛОУ','FontName','Arial Unicode
MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('k-капиталовооруженность','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('y,  sy, (d+n)k','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
text(0.1*ks,0.9*ym,'k*расчет =','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' )
text(0.4*ks,0.9*ym, nr1,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );
%ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО НАКОПЛЕНИЯ КАПИТАЛА
s0=sg-0.1;
s1=sg;
s2=sg+0.1;
y11=s0*y;
y12=s1*y;
y13=s2*y;
nr2=num2str(kg,3);
figure(3)
plot(k,y, k, y2,k,y11,k,y12,k,y13,'LineWidth',2);hold on;
plot (kg,kg*(n+d),'ob','MarkerSize',8,'LineWidth',2)
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('ЗОЛОТОЕПРАВИЛОЭКОНОМИКИСОЛОУ','FontName','Arial Unicode
MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
```

```
xlabel('k-капиталовооруженность','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('y, s0y, s1y, s2y, (d+n)k','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
text(0.1*ks,0.88*ym,'kg расчет =','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' )
text(0.4*ks,0.88*ym, nr2,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );
%ДОЛГОСРОЧНАЯ ДИНАМИКА КАПИТАЛОВООРУЖЕННОСТИ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ
ТРУДА
t=1;
nd(t)=(n+d);
for  t=2:1:T
 t;
nd(t)= (n+d);
end
kk0=s0*y./k;
kk1=s1*y./k;
kk2=s2*y./k;
yy0=a*(kk0-nd);
yy1=a*(kk1-nd);
yy2=a*(kk2-nd);
kkm=max(kk2);
yym=max(yy2);
nr3=num2str(s0,3);
nr4=num2str(s1,3);
nr5=num2str(s2,3);
figure(4)
plot(k,kk0,k,kk1,k,kk2,'LineWidth',1.5);hold on
plot(k,nd,'LineWidth',2)
grid
title('ТЕМПРОСТАКАПИТАЛОВООРУЖЕННОСТИЭКОНОМИКИСОЛОУ','FontName','Arial Unicode
MS','FontSize',9,'FontWeight','bold')
xlabel('k-капиталовооруженность','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('sy/k,  (d+n)','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')

text(0.1*ks,0.8*kkm,'s =','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' )
text(0.2*ks,0.8*kkm, nr3,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );
text(0.3*ks,0.8*kkm, nr4,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );
text(0.4*ks,0.8*kkm, nr5,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );

figure(5)
plot(k,yy0,k,yy1,k,yy2,'LineWidth',1.5)
grid
title('ТЕМПРОСТАПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИТРУДАЭКОНОМИКИСОЛОУ','FontName','Arial Unicode
MS','FontSize',9,'FontWeight','bold')
xlabel('k-капиталовооруженность','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('yy-темпростапроизводительности','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')

text(0.1*ks,0.8*yym,'s =','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' )
text(0.2*ks,0.8*yym, nr3,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );
text(0.3*ks,0.8*yym, nr4,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );
text(0.4*ks,0.8*yym, nr5,'FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold' );
```

Результаты работы программы:

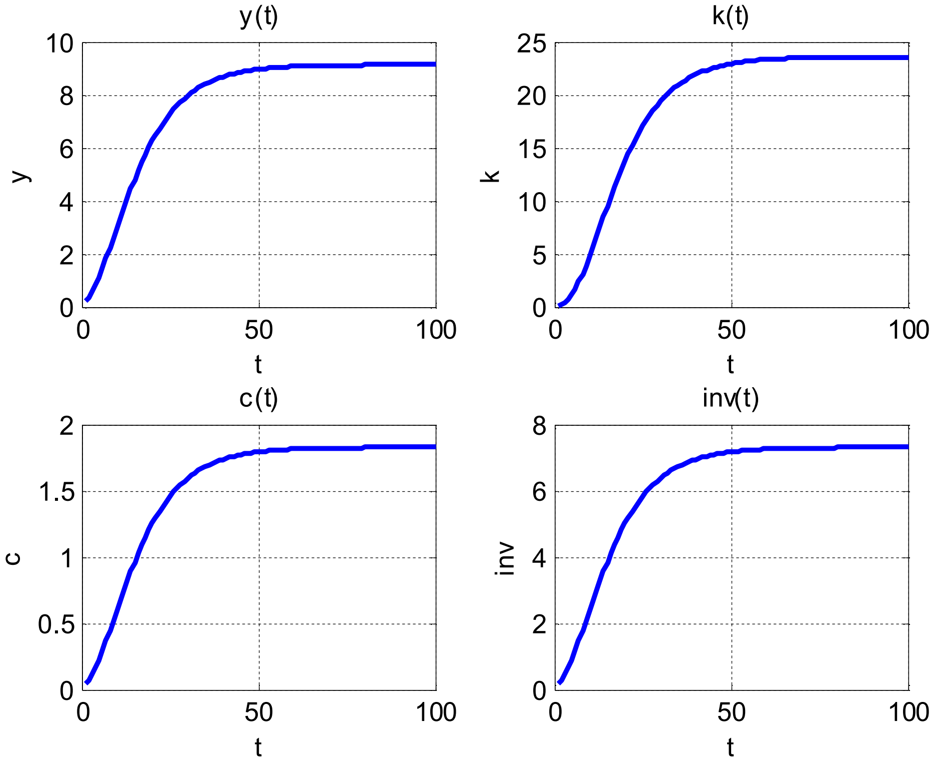


Рис. 10

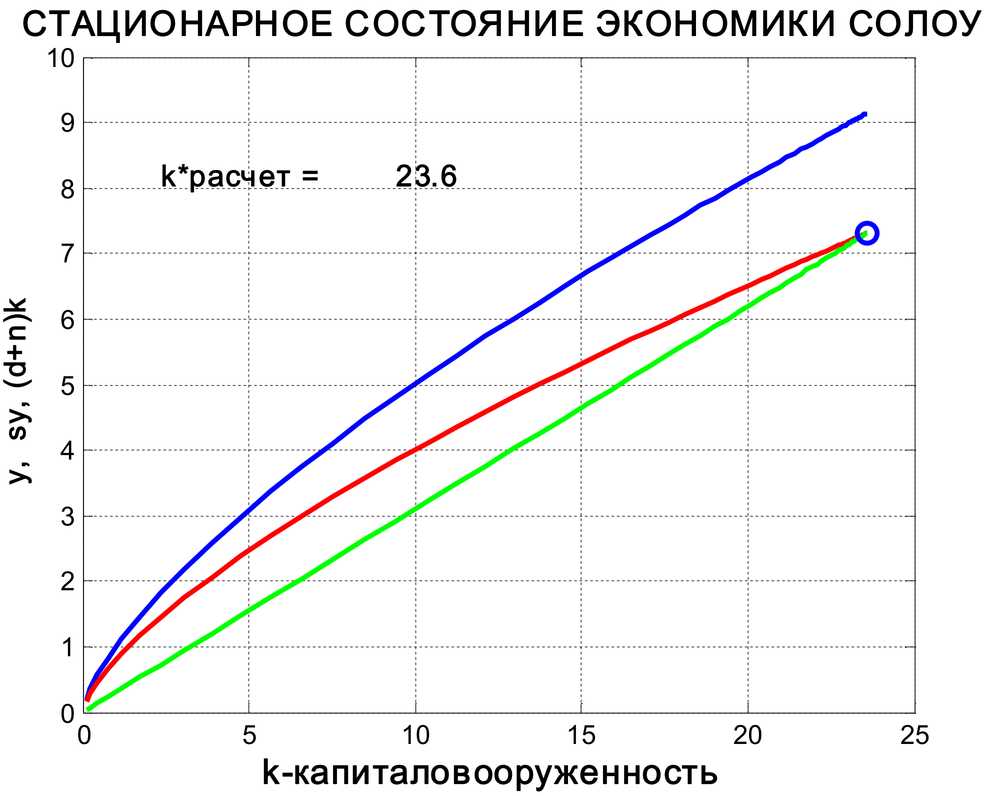


Рис. 11

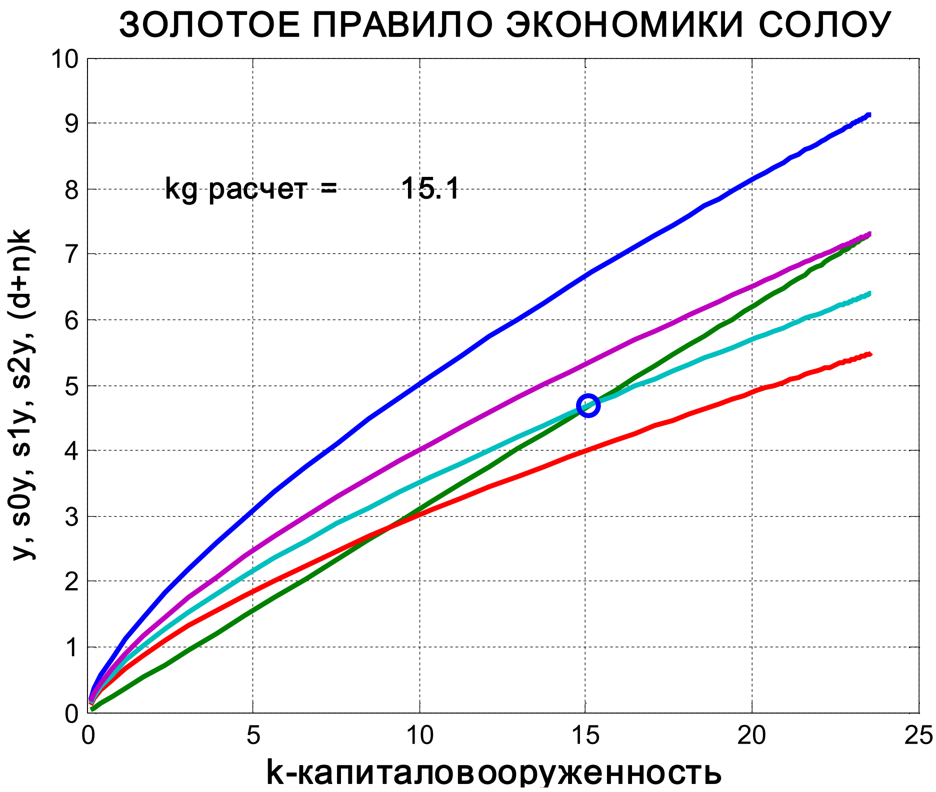

ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО ЭКОНОМИКИ СОЛОУ
kg расчет = 15.1
y, s0y, s1y, s2y, (d+n)k
k-капиталовооруженность

Рис.12

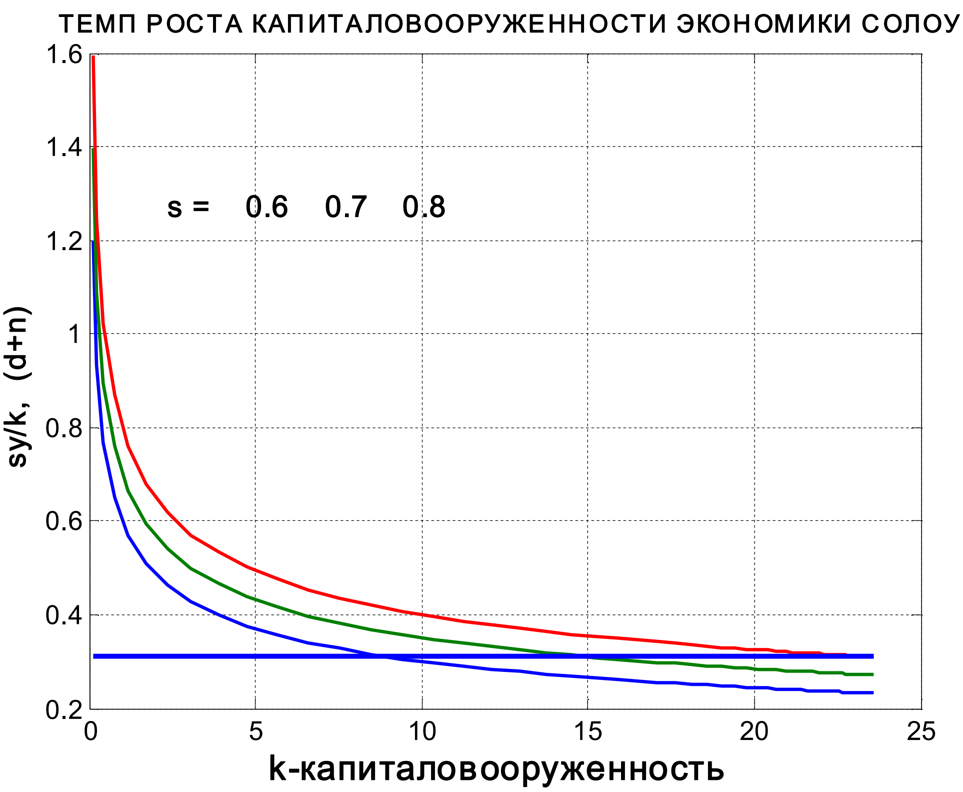

ТЕМП РОСТА КАПИТАЛОВООРУЖЕННОСТИ ЭКОНОМИКИ СОЛОУ
s = 0.6 0.7 0.8
sy/k, (d+n)
k-капиталовооруженность

Рис. 13

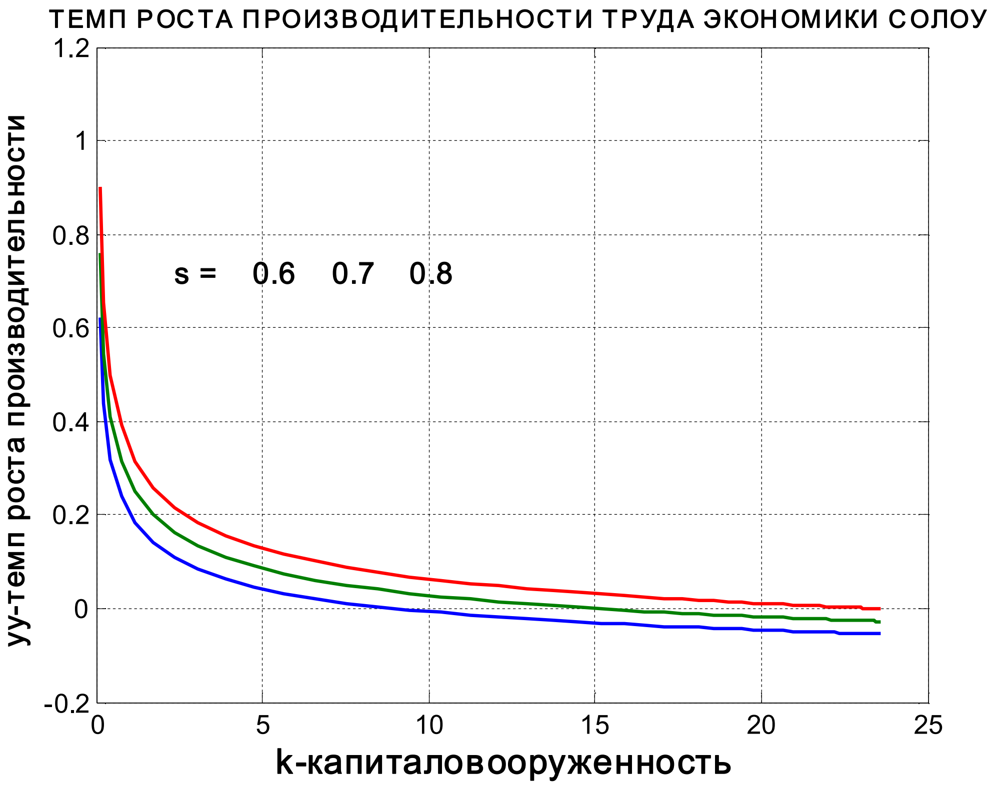


Рис. 14

Исследование непрерывной модели

а. Разработайте S-модель Солоус трудосберегающим НТП (решение дифференциального уравнения 43) и m-программу исследования этой модели, которая позволяет:

1. Рассчитывать стационарную точку k_A^* и норму сбереженияs_A^g, соответствующую золотому правилу, при трудосберегающем НТП.

2. Строить графики капиталовооруженности эффективного работника$k_A(t)$ и реальной капиталовооруженности $k(t)$.

3. Строить графики производительности труда y(t) и потребления на душу населения c(t).

4. Строить графики темпов прироста производительности труда$\frac{y'(t)}{y(t)}$ и капиталовооруженности $\frac{k'(t)}{k(t)}$.

б. Модифицируйте S-модель, полученную в пункте «а», таким образом, чтобы она позволяла моделировать переходные процессы в экономике Солоу, возникающие при скачкообразном изменении нормы сбережения в некоторый момент t.

Используйте полученнуюS-модель для анализа переходных процессов в следующих случаях:

1. НТП отсутствует g=ои в момент времени t=50 происходит «скачек вверх» нормы сбережения на 0.2

2. Ненулевой НТП и в момент времени t=50 происходит «скачек вверх» нормы сбережения на 0.2

3. НТП отсутствует g=ои в момент времени t=50 происходит «скачек вниз» нормы сбережения на 0.2

4. Ненулевой НТП и в момент времени t=50 происходит «скачек вниз» нормы сбережения на 0.2

Исходные данные:

s-норма сбережения	d-норма амортизации капитала	n-темп роста труда	a-коэффициент эластичности капитала
0.5-0.7	0.25-0,35	0.01-0.04	0.6-0.8

f - производственная функция	k0	A0	Темп НТП g	Интервал моделирования [0, T]	
k^a	1.0	1.0	0.0-0.05	«а» и «в» [0, 50]	«б» [0,100]

Дополнительное задание «в»

Пусть численность населения изменяется по закону $N(t) = N(0)e^{nt}$ и в экономике полная занятость. Учитывая это, модифицируйте S-модель и m-программу из пункта «а » таким образом, чтобы они позволяли рассчитывать динамику национального дохода $Y(t)$ и динамику массы капитала $\mathrm{K}(t)$, темпы их прироста и строить соответствующие графики.($N(0)$ =50).

Оформите все полученные результаты в виде отчета в формате Word.

Отчет должен содержать:

5. Постановку задачи и исходные данные.
6. Тексты программ с подробными комментариями и схемы S-моделей.
7. Результаты моделирования (полученные значения необходимых параметров, графики и.т.д)
8. Выводы из полученных результатов

   К отчету прилагаются все созданные .m и .mdl файлы

ПРИМЕРЫ ПРОГРАММ И S-МОДЕЛЕЙ ДЛЯИССЛЕДОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ СОЛОУ-СВАНА В СРЕДЕ MATLAB

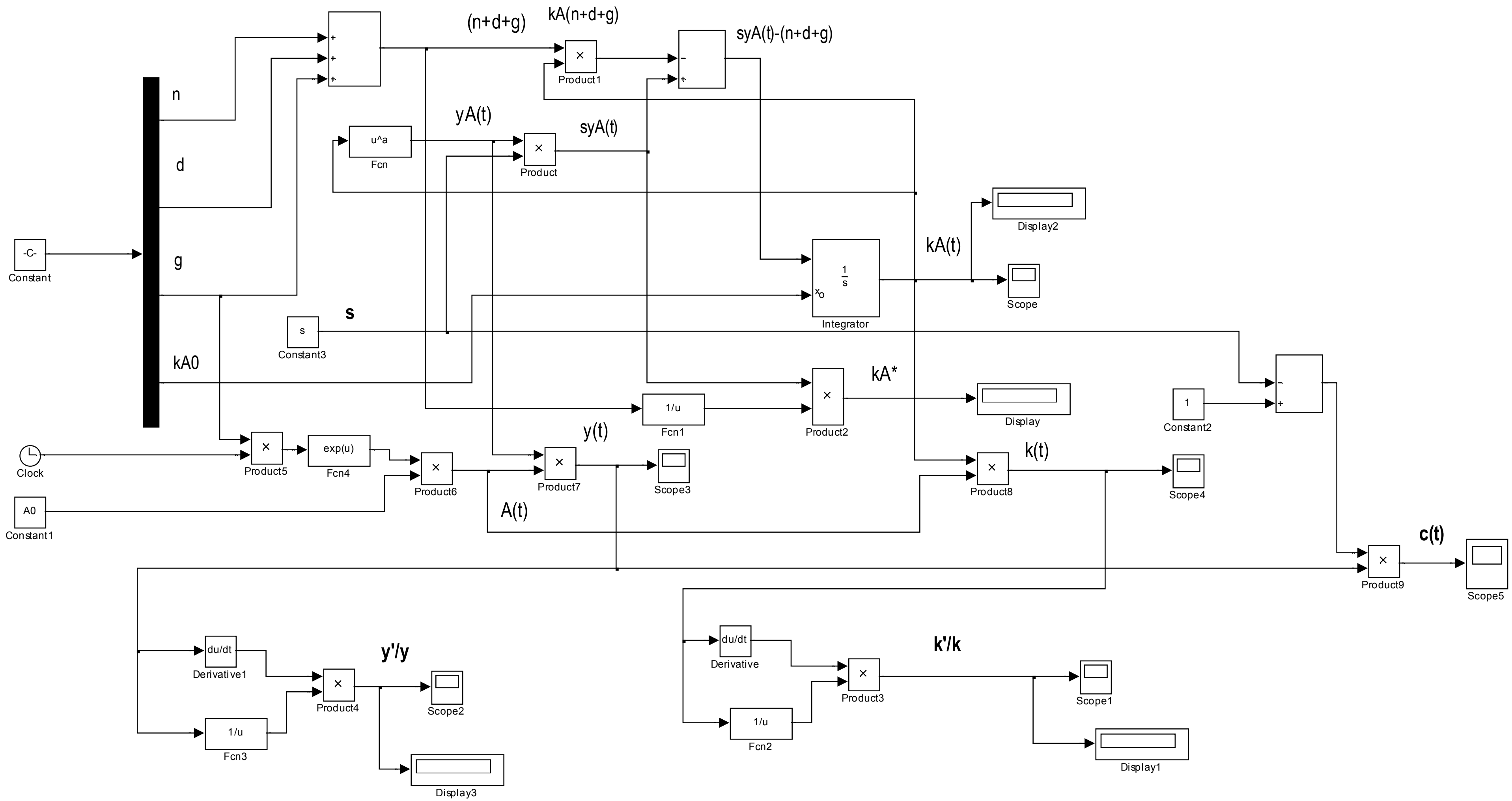
1. Пример S-модели и программы для анализа трудосберегающего НТП

```
clearall
clc
%УДЕЛЬНАЯМОДЕЛЬСОЛОУСТРУДОСБЕРЕГАЮЩИМНТПНЕПРЕРЫВНЫЙВАРИАНТ
%Открытиемодели
open_system('SolouALv7')
%ЗАДАНИЕИСХОДНЫХДАННЫХ
%нормаамортизациикапитала
d=0.25;
%нормасбережения
s=0.6;
% темпростатруда
n=0.02;
%темпростапрогресса
g=0.0;
%коэффициентэластичностикапитала
a=0.7;
%начальнаякапиталовооруженность
k0=1.0
%начальноезначениеA
A0=1;
%Выполнениемодели
sim('SolouALv7')
%Формированиеграфиковинадписей
%Черчениеграфика
kA=ScopeData;
kA(:,1)=[];
t=ScopeData;
t(:,2)=[];
k=ScopeData4;
k(:,1)=[];
y=ScopeData3;
y(:,1)=[];
yy=ScopeData2;
```

```
yy(:,1)=[];
kk=ScopeData1;
kk(:,1)=[];
c=ScopeData5;
c(:,1)=[];
figure(1)
plot(t,kA,'LineWidth',2)
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('ГРАФИКМОДЕЛЬAL','FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('Кап. вооруженностьэфф.
работника','FontName','ArialUnicodeMS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
figure(4)
plot(t,yy,'LineWidth',2)
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('ГРАФИКМОДЕЛЬ AL','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('ТЕМППРИРОСТАПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИТРУДА','FontName','Arial Unicode
MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
figure(5)
plot(t,kk,'LineWidth',2)
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('ГРАФИКМОДЕЛЬ AL','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('ТЕМППРИРОСТАКАПИТАЛОВООРУЖЕННОСТИ','FontName','Arial Unicode
MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
figure(3)
plot(t,y,'LineWidth',2)
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('ГРАФИКМОДЕЛЬ AL','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
```

```
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬТРУДА','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
figure(2)
plot(t,k,'LineWidth',2);hold on;
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('ГРАФИКМОДЕЛЬ AL','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('Капиталовооруженность ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')

figure(6)
plot(t,c,'LineWidth',2);hold on;
%Формированиенадписей
grid
%Формированиенадписей
title('ГРАФИКМОДЕЛЬ AL','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold')
xlabel('t-ИНТЕРВАЛВРЕМЕНИ','FontName','Arial Unicode MS','FontSize',12,'FontWeight','bold' )
ylabel('Потреблениенадушунаселения ','FontName','Arial Unicode
MS','FontSize',10,'FontWeight','bold')
```



MODEL SOLOY AL

Рис. 15 ИСХОДНАЯ S-МОДЕЛЬ СОЛОУ С НТП

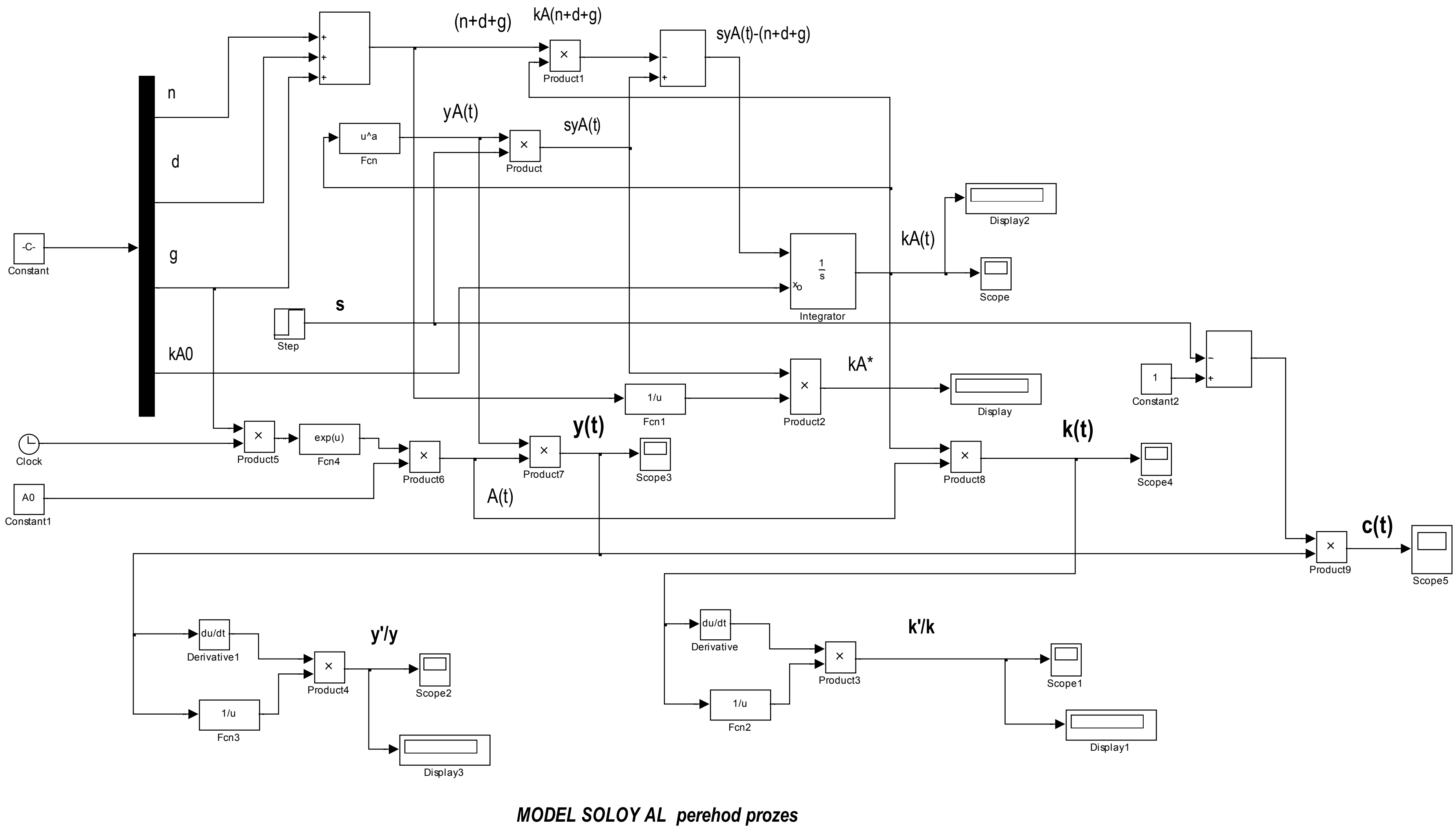


РИС. 16 МОДИФИЦИРОВАННАЯ S-МОДЕЛЬ СОЛОУ С НТП ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Результаты работы программы с исходной моделью НТП g=0.02

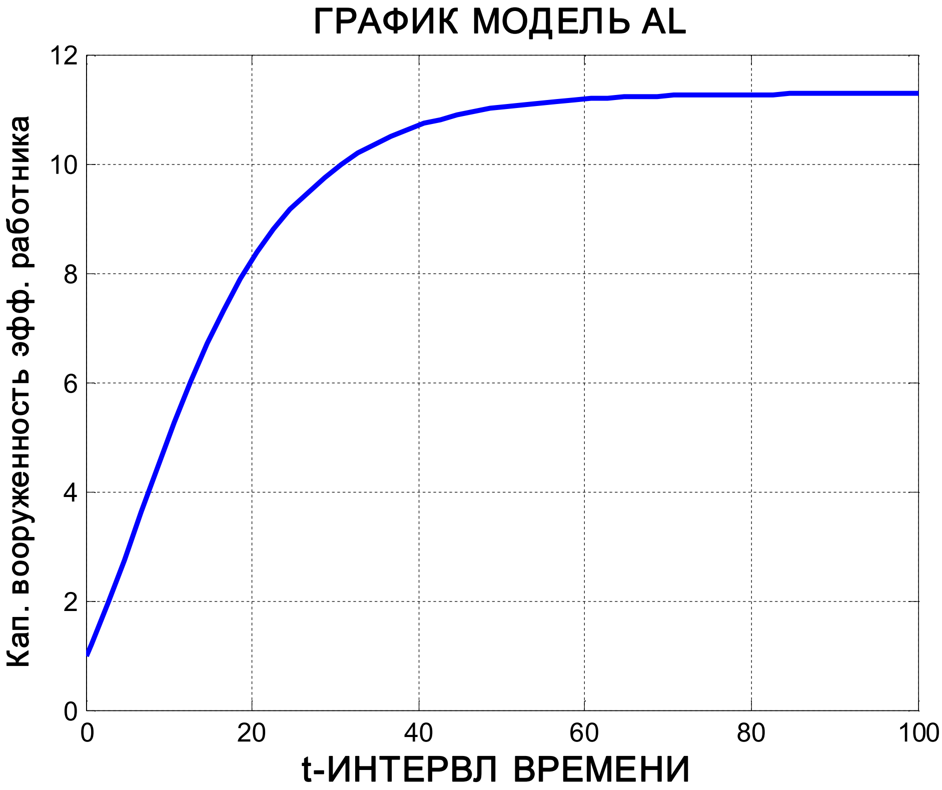


Рис. 17

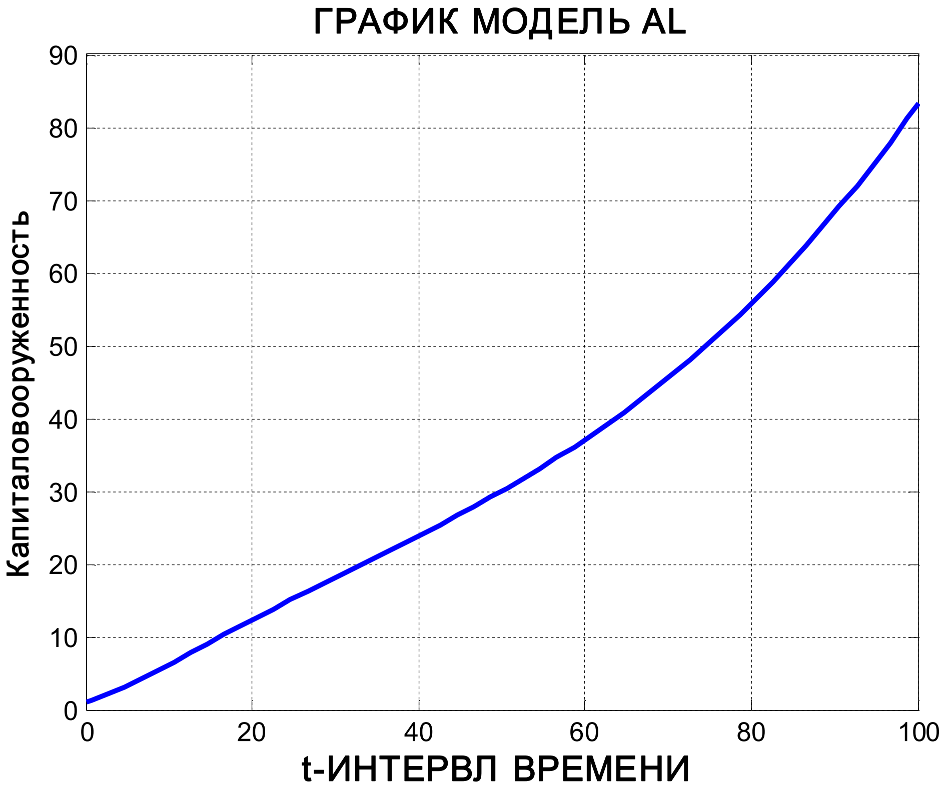


Рис. 18

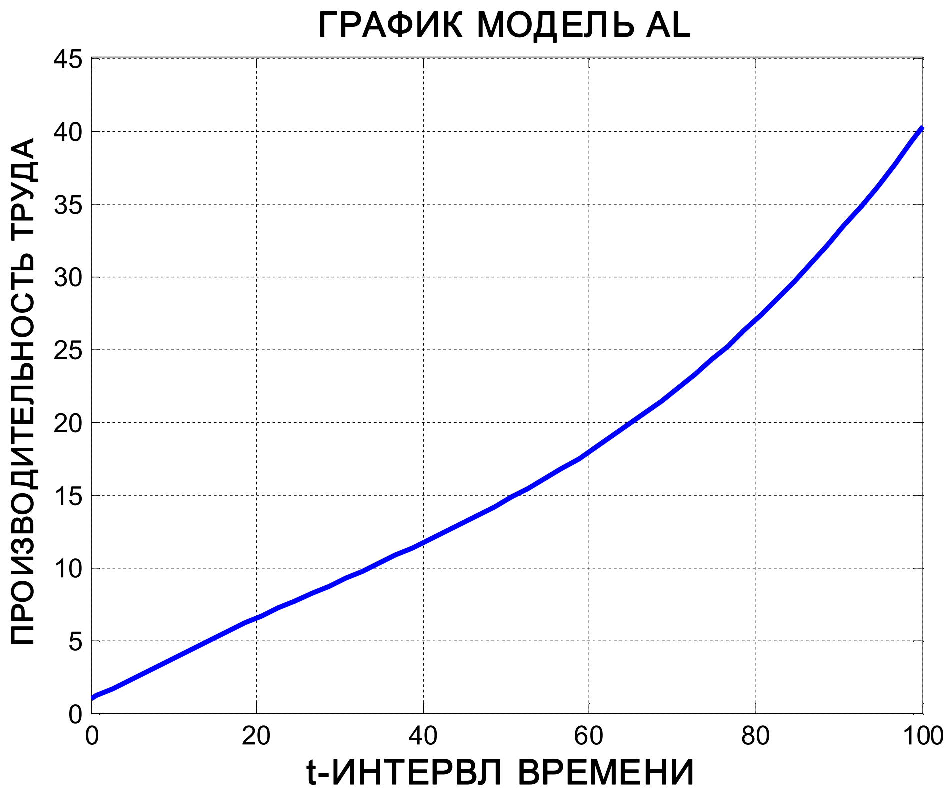


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА
t-ИНТЕРВЛ ВРЕМЕНИ
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
0
20
40
60
80
100

Рис. 19

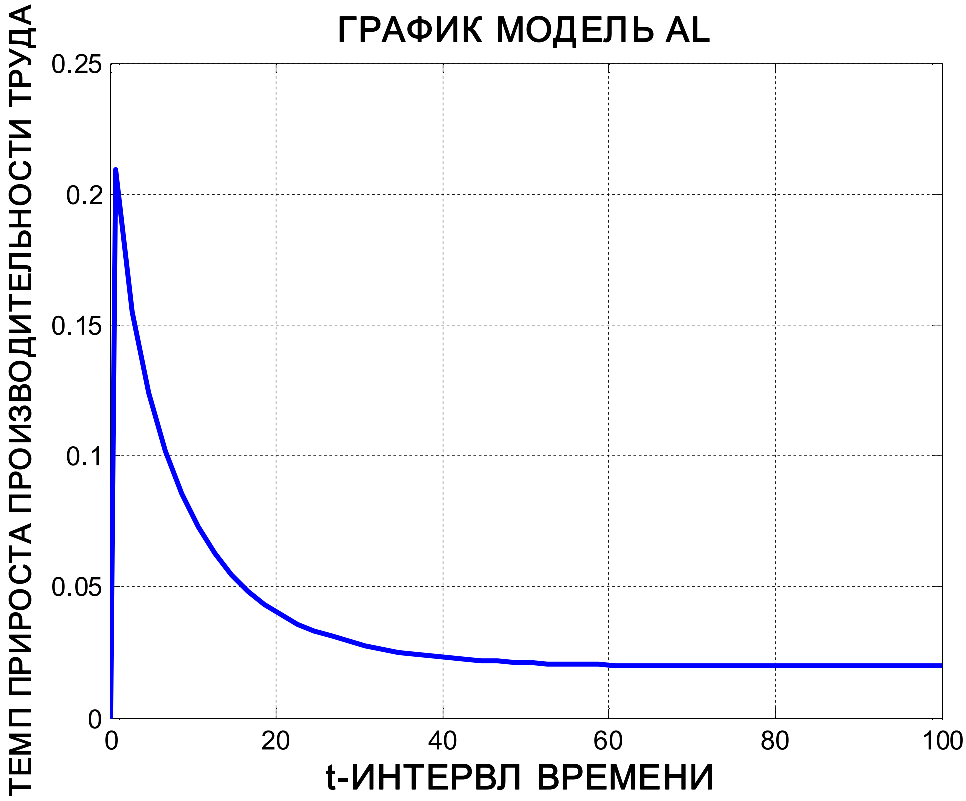


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ТЕМП ПРИРОСТА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА
t-ИНТЕРВЛ ВРЕМЕНИ
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0
20
40
60
80
100

Рис. 20

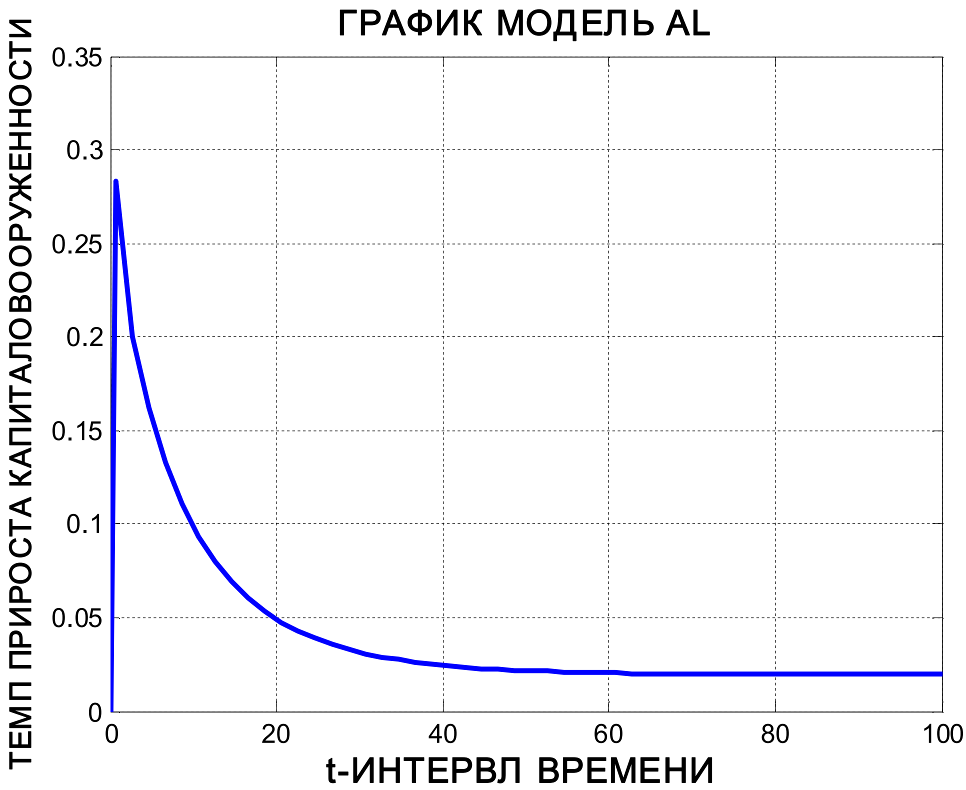


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ТЕМП ПРИРОСТА КАПИТАЛОВООРУЖЕННОСТИ
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 21

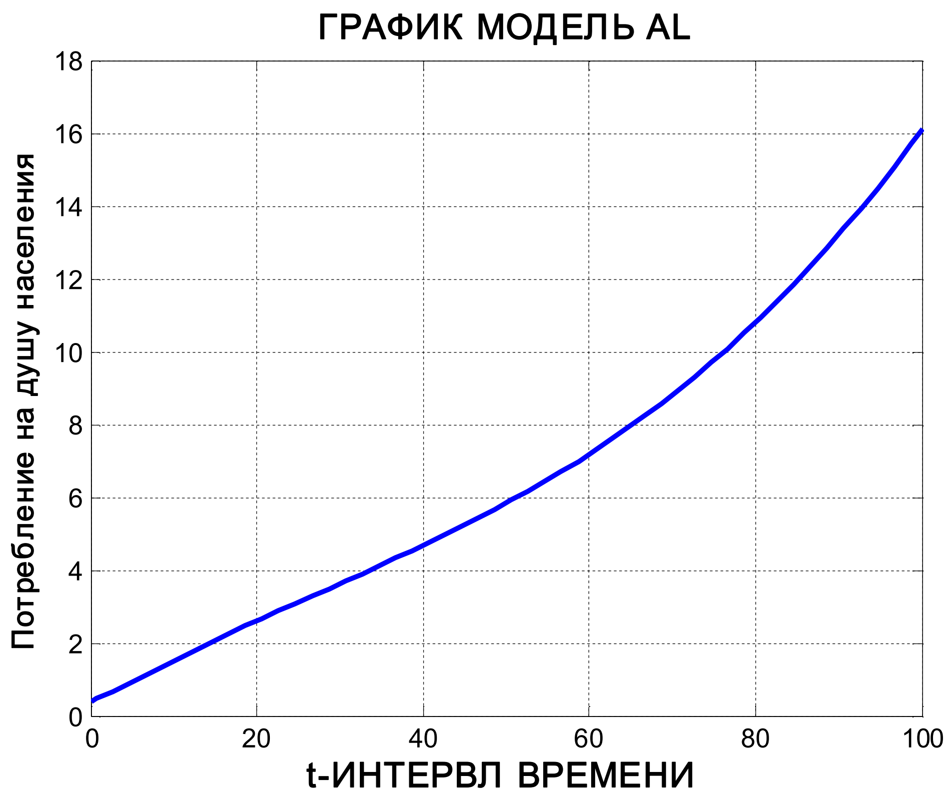


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
Потребление на душу населения
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 22

Результаты работы программы с модифицированной S-моделью без НТП g=0(скачек s в момент t=50 с 0.6 до 0.3)

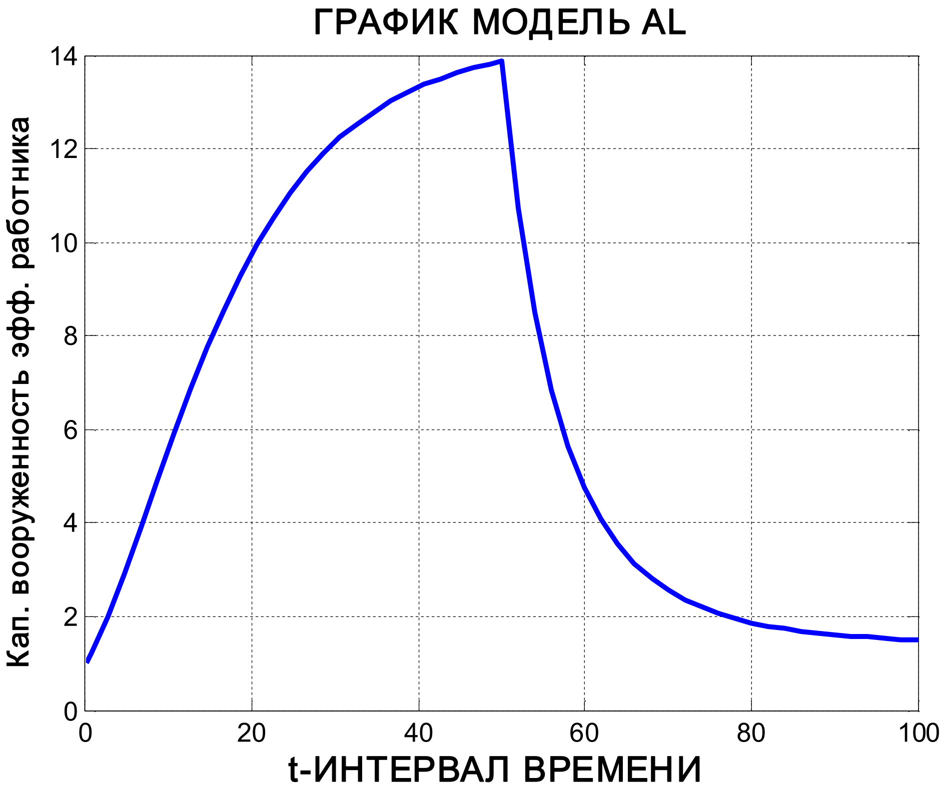


Рис. 23

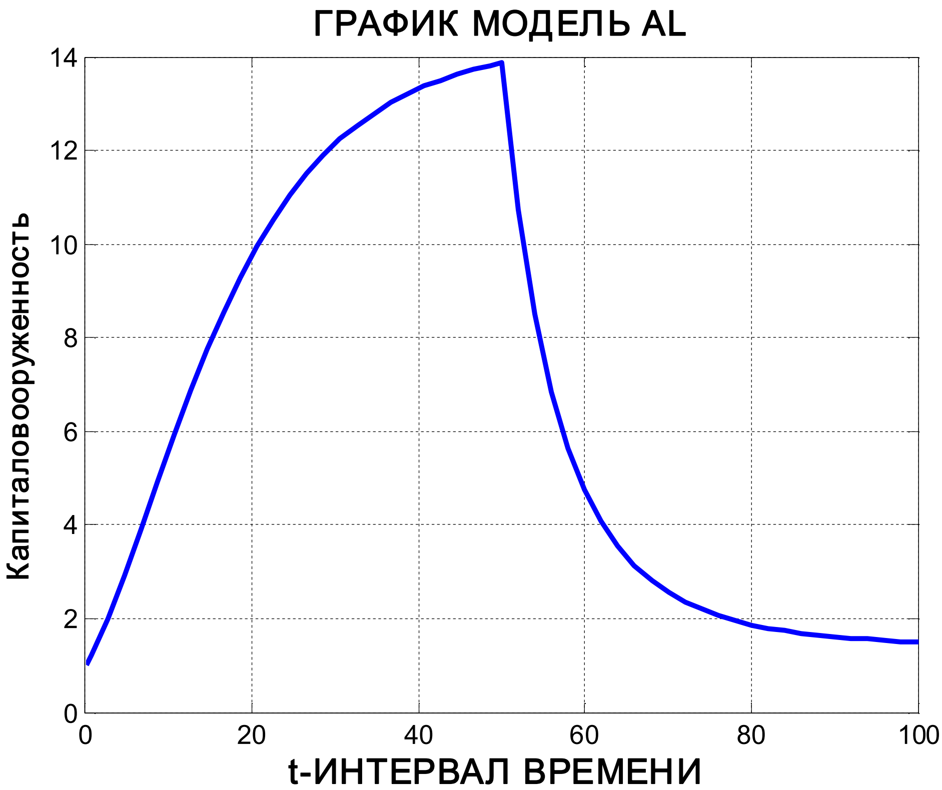


Рис.24

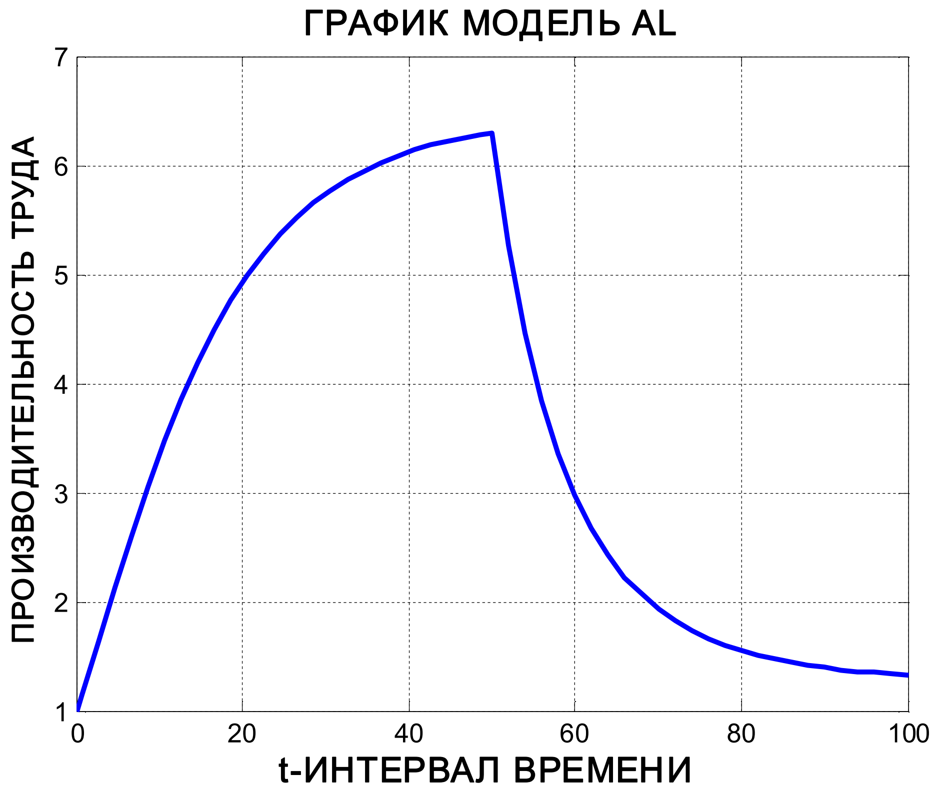


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА
7
6
5
4
3
2
1
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис.25

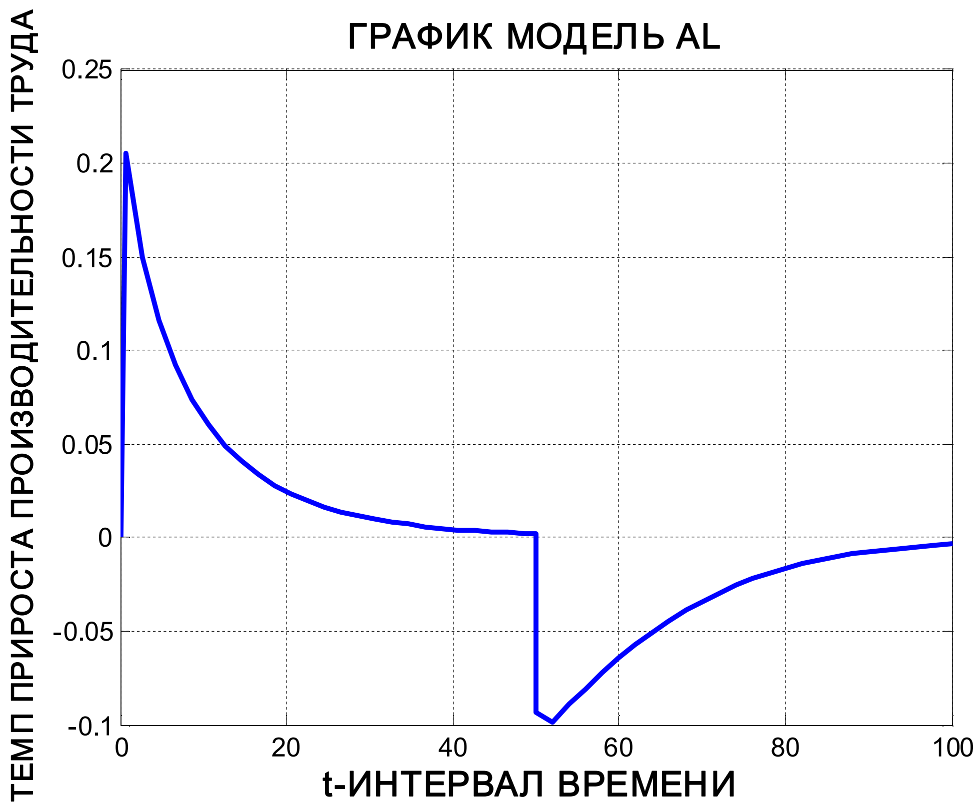


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ТЕМП ПРИРОСТА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 26

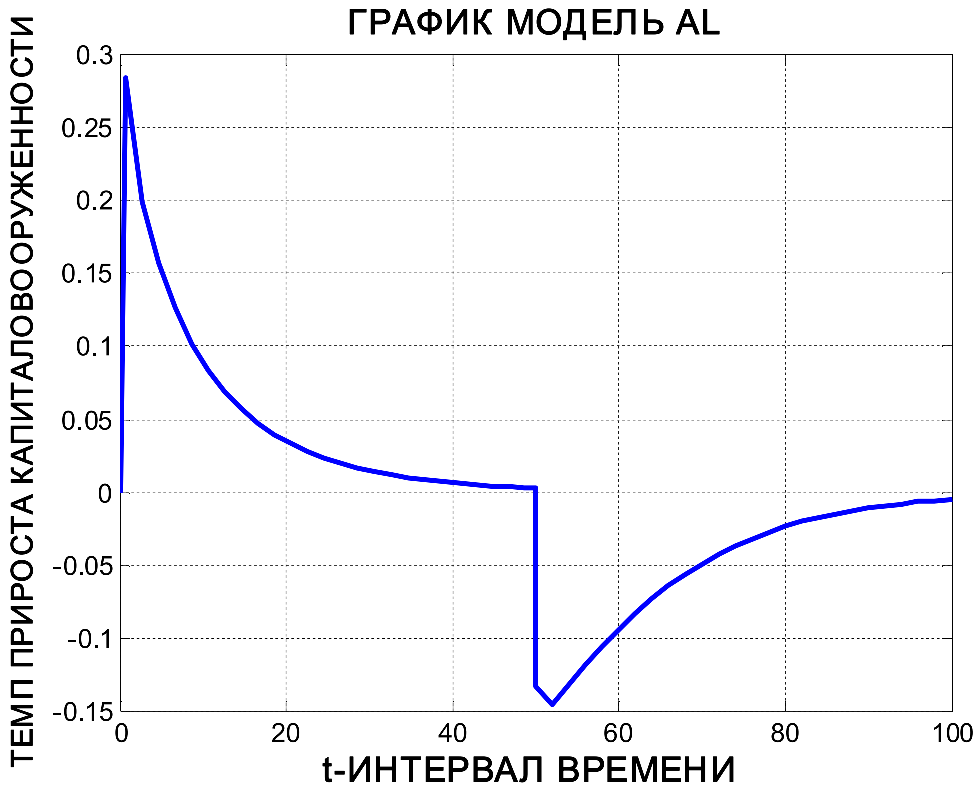


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ТЕМП ПРИРОСТА КАПИТАЛОВООРУЖЕННОСТИ
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 27

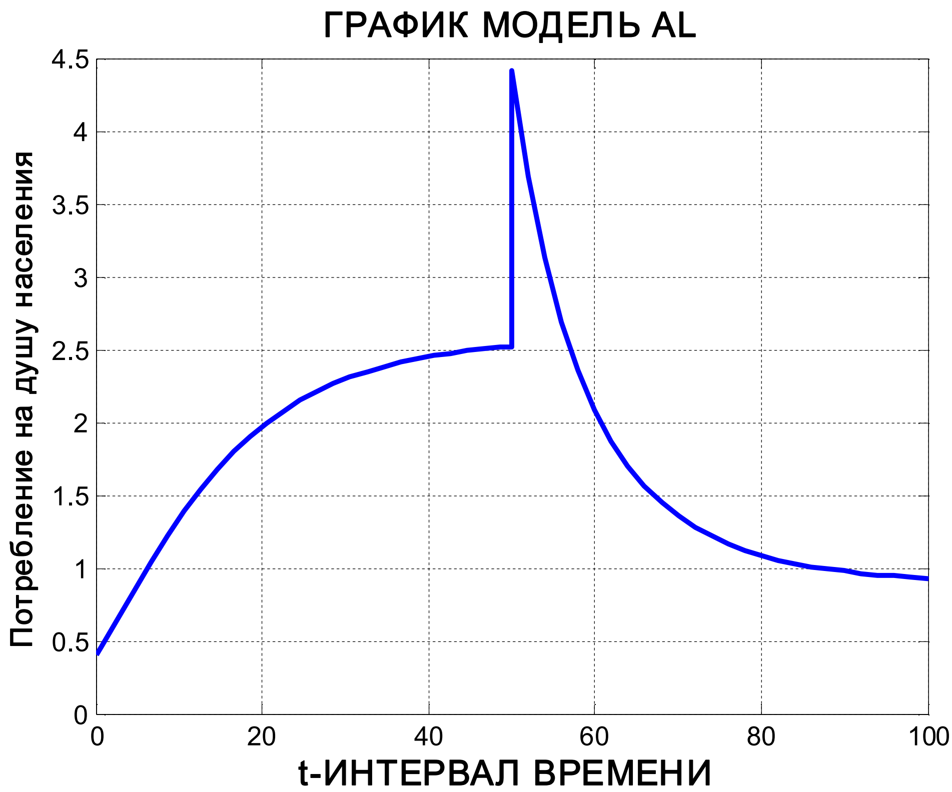


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
Потребление на душу населения
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 28

Результаты работы программы с модифицированной S-моделью с трудосберегающим НТП g=0.02 (скачек s в момент t=50 с 0.6 до 0.3)

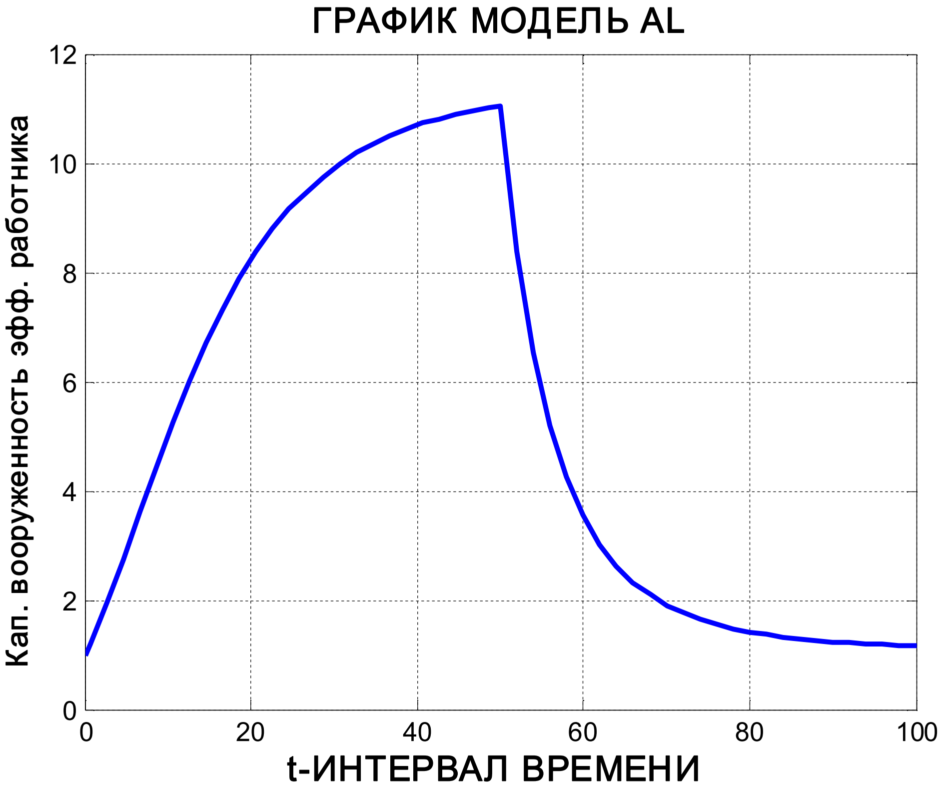


Рис. 29

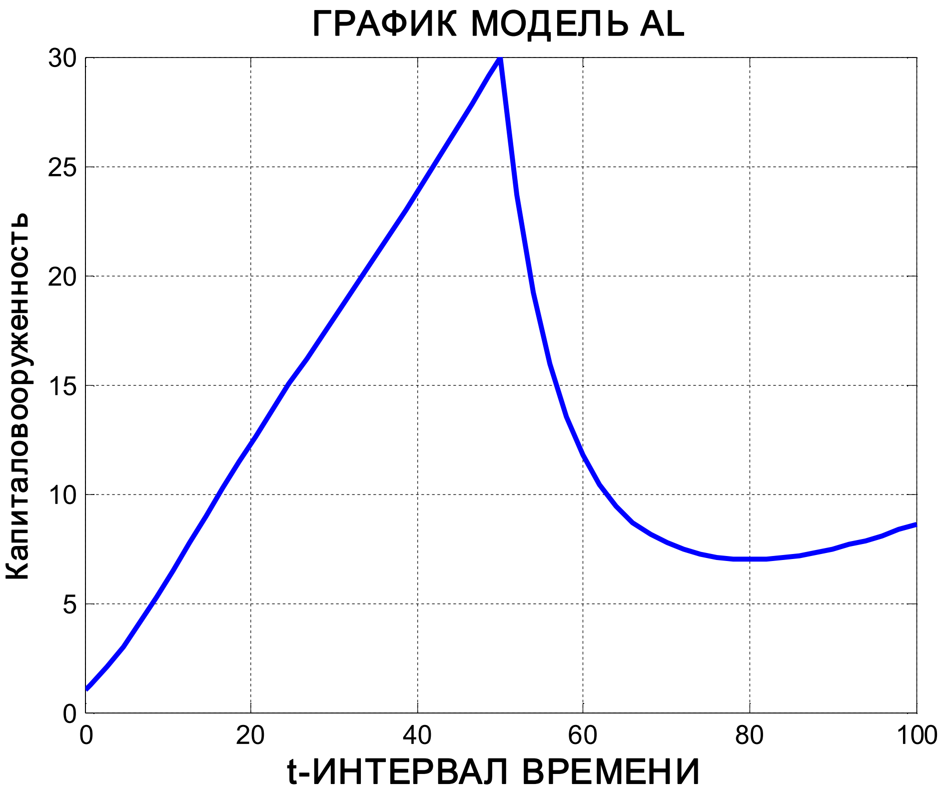


Рис. 30

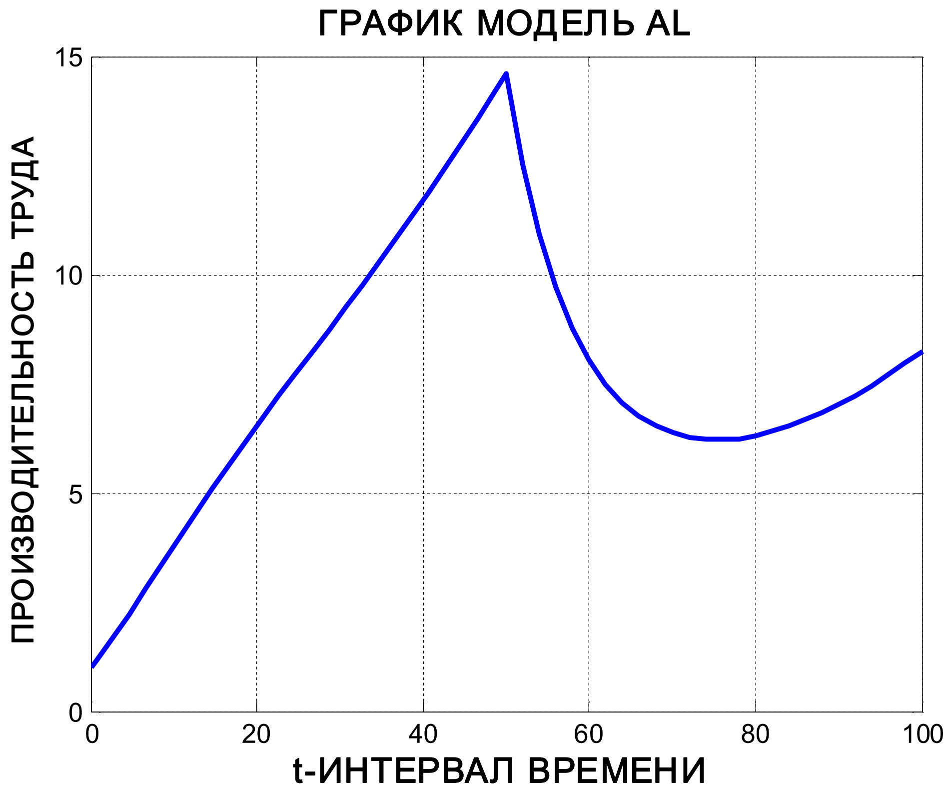


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА
15
10
5
0
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 31

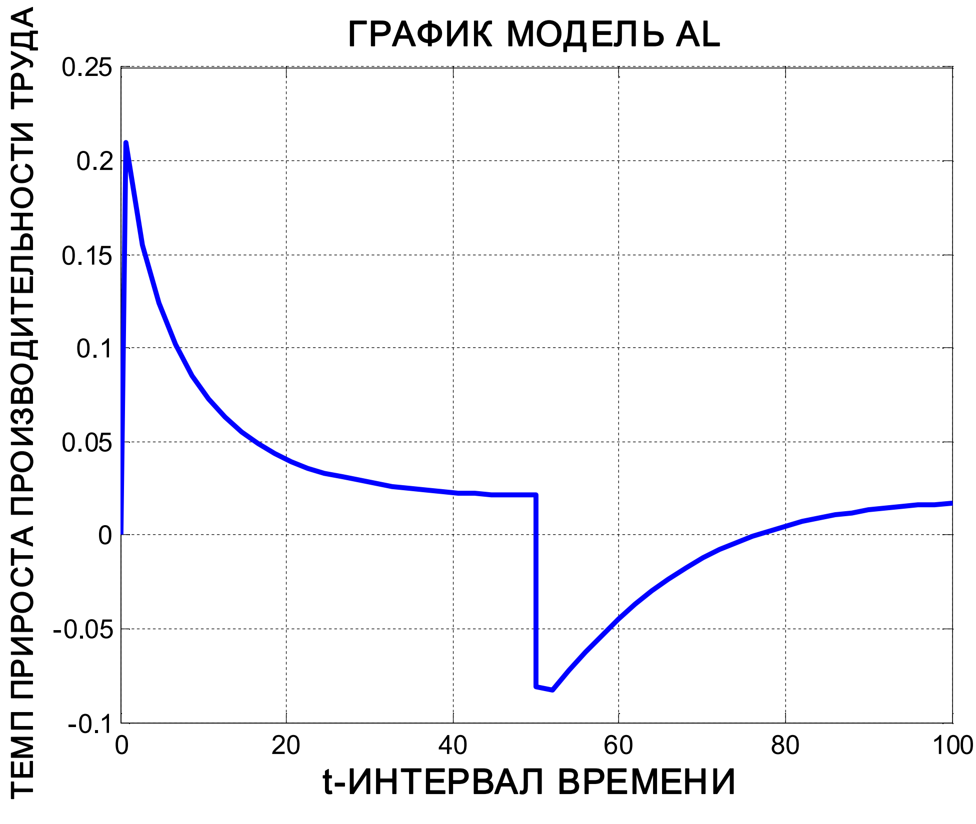


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ТЕМП ПРИРОСТА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 32

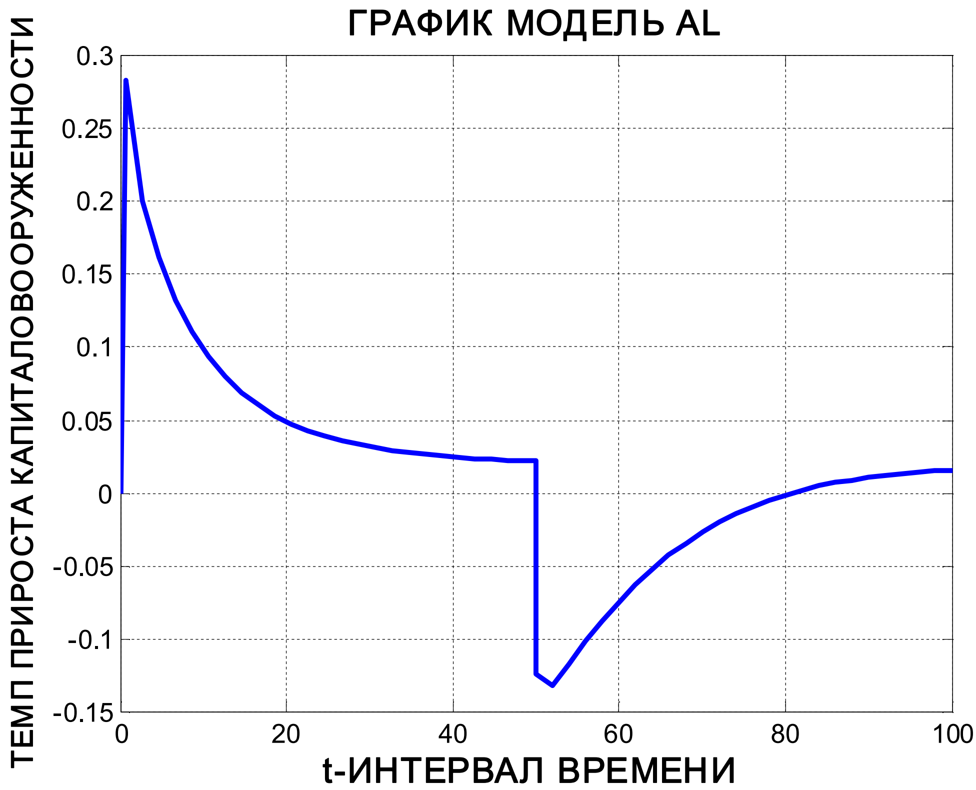


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
ТЕМП ПРИРОСТА КАПИТАЛОВООРУЖЕННОСТИ
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 33

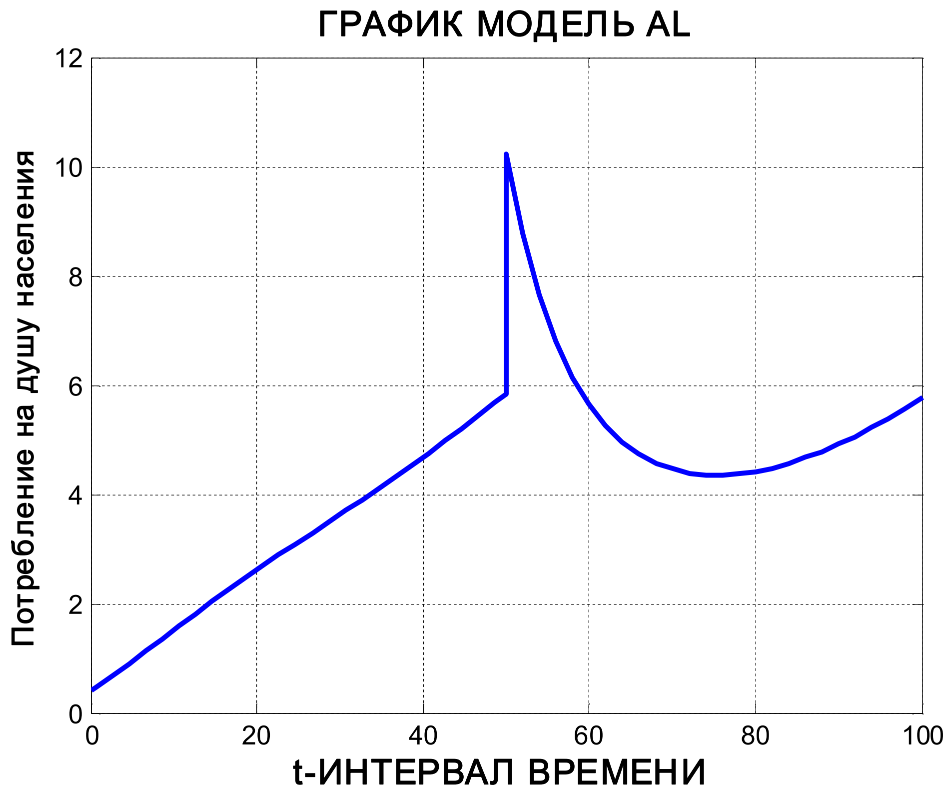


ГРАФИК МОДЕЛЬ AL
Потребление на душу населения
12
10
8
6
4
2
0
0
20
40
60
80
100
t-ИНТЕРВАЛ ВРЕМЕНИ

Рис. 34

ЛИТЕРАТУРА

1. Аллен Р. Математическая экономия. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963.– 667 с .
2. Демченко С.К.Эволюция теорий экономического роста: монография /С.К.Демченко. Красн.гос.ун-т. - Красноярск, 2006. - 149с.
3. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в. Основы применения.-М.: Солон- Р, 2005.
4. Потемкин В. Г. Вычисления в среде MATLAB. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ,2004
5. Самуэльсон П. Экономика. - М.: Изд-во «Прогресс». - 1964. - 779с.
6. Левитана Р.Ф. История экономических учений: Полный курс в кратком изложений / Р.Ф. Лавитана. – М.: ИНФРА – М, 2002. – 224с.
7. Нуреев Р. Теория развития: кейнсианские модели становления рыночной экономики // Вопросы экономики. - 2000. – №- 4. - С.137-156.
8. Нобелевские лауреаты XX века. Экономика: энциклопедический словарь. - М.: РОССПЭН. - 2001. - 956с
9. Вечкаллов Г. Макроэкономика, / Г. Вечкаллов, Г. Вечкалова. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2004. – 544с.
10. Гэлбрэйт Т.Дж. Новое индустриальное общество: пер. с англ. /Т. Дж.Гэлбрэйт. – М.: АСТ; Транзиткнига; СПб.: TerraFantastica. - 2004. – с. 254
11. Фельдман Г.А. Модель экономического роста // Плановое хозяйство. - 1929. - № 12. - С.104
12. Цыбатов В.А. Моделирование экономического роста. - М.: Изд-во Самар.гос.экон.ун-та. - 2006. - 385с.
13. Харрод Р. К теории экономической динамики. Новые выводыэкономической теории и их применение в экономической политике /КлассикиКейнсианства. – М.: Экономика, 1997. – Т.1 – С. 39-194

ОСНОВАТЕЛЬ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА